**布莱克-垃圾人模型 详解**

最初日期：2007 年 2 月

修订日期：2014 年 6 月 20 日

© 版权所有 2007-14： 杰伊·沃尔特斯，CFA jwalters@blacklitterman.org

# *抽象[[1]](#footnote-1)*

在本文中，我们调查了关于Black-Litterman模型的文献。该调查既作为年表又作为分类法提供，因为文献中对该模型有许多主张。我们提供了规范模型的完整描述，包括使用泰尔混合估计模型和贝叶斯理论从基本原则中得出的完整l推导 。考虑模型的各种参数，以及有关其计算或校准的信息。 进一步考虑了关键论文的参考资料，并用工作实例说明了这些概念。

# 介绍

Black-Litterman 模型由 Fischer Black 和 Robert Litterman 于 1990 年首次出版。 自原始论文发表以来的二十多年里，许多作者的研究将他们的模型称为Black-Litterman。这导致各种模型被标记为BlackLitterman，即使它们可能与Black and Litterman创建的原始模型非常不同。在文献的时间顺序调查中，我们将介绍几篇对布莱克-垃圾人模型文献做出重大贡献的论文。我们还将记录被标记为黑色垃圾人的模型的分类。 我们将进一步将 原作者在论文中描述的Bla ckLitterman模型称为规范的Black-Litterman模型。

典型的布莱克-垃圾人模型对资产配置问题做出了两个重大贡献。首先，它提供了一个直观的先验，均衡市场投资组合，作为估计资产回报的起点。 以前的类似工作要么从无信息的均匀先验分布开始，要么从全局最小方差组合开始。 后一种方法由Frost and Savarino （1986）和Jorion （1986）描述，采用收缩方法来改善最终资产配置。

这两种方法都没有与市场的直观联系。 人们可以使用“逆向优化”来生成均衡市场投资组合回报的稳定分布作为收缩起点的想法是对回报估计过程的重大改进。

其次，Black-Litterman模型提供了一种明确的方式来指定投资者对回报的看法，并将投资者的观点与先前的信息相结合。 投资者的观点是部分的或完整的，这些观点可以跨越任意和重叠的资产集。该模型输出了预期超额收益的估计值和相应的精度 在Black and Litterman（1991a）之前，没有针对投资组合选择问题发表过类似的内容。 泰尔的混合模型已经开发出来，但没有人将其应用于估计资产回报的问题。 没有重新搜索将指定观点的过程与先前和投资者观点的混合联系起来。 BlackLitterman模型提供了一个量化框架，用于指定投资者的观点，并在得出新的组合分布之前将这些投资者的观点与ituitive结合起来。

自Black-Litterman模型发布以来，投资组合选择问题的最新技术发生了重大变化。 由于其丰富的理论基础，它可以与许多现代投资组合选择方法一起应用，如文献所示。

文档的其余部分按以下方式构建。 首先，我们将讨论文献调查和分类法，然后我们将描述每个参考模型，然后是估计模型。 最后，我们将说明文献调查中描述的许多论文中的概念。

## 历史分类学和文献调查

本文的这一部分将提供文献调查，并对每位作者使用的模型进行分类。 我们将用于对作者模型进行分类的主要维度将是; 它是否将估计值指定为分布或点估计值，其次是否包含参数 τ。 为了使作者的模型成为规范的黑人垃圾人，它需要同时满足这两个条件。

我们将根据上面提供的模糊概念将这些模型收集到三个不同的参考模型中。我们将同时满足这两个条件的情况描述为规范参考模型。 这是原作者描述的模型。 替代参考模型描述了使用点估计的模型，但由于 some 原因，包括 τ，它现在成为没有定量基础的比例因子。这些作者将该模型视为收缩/混合模型，并失去了与贝叶斯统计的联系。正如我们将看到的，使用贝叶斯定律公式，但代入n个不同的变量在理论上是站不住脚的。 最后，Beyond Black-Litterman 参考模型使用点估计，根本不包括 τ。在这里，我们看到一个纯粹的收缩/混合模型。 本文对每个参考模型都有深入的描述。

Black-Litterman 模型最初由高盛的Fischer Black和Robert Litterman在高盛内部固定收益研究报告Black and Litterman（1990）中发表。这份研究报告被扩展成一篇论文，并于1991年发表在《固定收益杂志》（Journal of Fixed Income， Black and Litterman，1991a）上。本文没有提供模型中使用的所有公式，但确实提供了模型特征的良好概述。同年，高盛（Goldman Sachs）内部固定收益研究报告《Black and Litterman》（Black and Litterman，1991b）出版。第二篇论文后来被扩展并发表在金融分析师杂志（FAJ）上，名为Black and Litterman（1992）。后一篇文章随后在1990年代中期由FAJ重新发表。 FAJ文章的复制品在互联网上随处可见。 它提供了方法的基本原理，以及有关推导的一些信息，但没有显示所有公式或完整的推导。 它还包括一个相当复杂的工作示例based关于全局均衡，参见Litterman （2003）以获取有关解决此问题所需方法的更多详细信息。 不幸的是，由于这两个问题的合并，它们的结果很难重现。 他和Litterman（1999）是原作者之一的最后一篇论文，它确实提供了有关模型工作的更多详细信息，但不是一套完整的公式。 它们确实提供了一个更简单的复制工作示例。

Bevan和Winkelmann（1998）详细介绍了如何在高盛使用Black-Litterman作为他们更广泛的资产配置过程的一部分，包括对他们执行的模型的一些校准。 对于任何计划将Black-Litterman构建到正在进行的资产分配过程中的人来说，这都是有用的信息。

Satchell and Scowcroft（2000）试图揭开Black-Litterman模型的神秘面纱，但却引入了一种新的非贝叶斯模型表达。 他们的模型使用先验和视图的点估计，并且仅使用 τ 和 Ω 来对抗视图对先验视图的收缩量。由于它们使用点估计值而不是分布，因此其模型不包含有关估计精度的任何信息。这允许他们推荐设置 τ = 1。他们还引入了随机指标τ，但由于他们使用点估计，这实际上变成了一个具有随机回报协方差的模型。 在此之后，该模型偶尔在文献中使用，但在 2000年代中期在很大程度上被Meucci的模型所取代。

Drobetz（2001）提供了对Black-Litterman模型的进一步描述，包括如何解释估计中的置信度（包括图表）的良好讨论。 他以身作则。[需要更多文字]

Fusai和Meucci（2003）引入了模型的另一个非贝叶斯变体，该变体一起删除了参数τ。 Meucci（2005）跟进了这篇论文，并创造了“Beyond Black-Litterman”这个短语。一旦模型仅被视为收缩模型，仅Ω就可以为收缩提供足够的自由度，而τ是多余的和令人困惑的。自2000年代中期以来，我们已经看到了文献中使用的规范和“超越黑人垃圾人”模型的混合[[2]](#footnote-2)。 自Fuasi and Meucci （2003）以来，在Michaud等人（2013）揭穿它之前，很少使用hyb rid 参考模型。

Firoozye和Blamont（2003）提供了规范参考模型的良好概述，并试图在参数τ的设置中提供直觉。它们说明了由于混合而后验估计的瓦里安 e 减少。

Herold（2003）提供了另一种问题的观点，他研究了优化主动投资组合管理的alpha生成，基本上指定样本分布的mean为零。他使用具有点估计和跟踪误差的替代参考模型来确定允许的收缩量。 他的论文的两个重要贡献是;将模型应用于主动投资组合管理以及一些可用于验证视图是否合理的附加 l 度量。

Koch（2004）是关于Black-Litterman模型的Powerpoint演示文稿。它包括“主公式”的推导和100%确定性的替代形式。 他没有研究后验方差，也没有在不确定性（一般情况下）展示“主公式”的替代形式。他确实包括了一张关于τ后验估计灵敏度的幻灯片，但他使用了替代参考模型，因此此信息对于规范模型没有价值。

Idzorek（2005）引入了一种指定Ω的技术，使得收缩的影响以0和100%置信度引起的变化之间的权重变化百分比来指定。他的论文使用了Alternative Reference Model，但他的技术可以应用于Canonical Black-Litterman模型，因为它对投资者指定的τ值很敏感。

Krishnan和Mains（2005）为Black-Litterman模型提供了与市场无关的附加因素的扩展。 他们称之为双因素黑人垃圾人模型，他们展示了一个用衰退因素扩展黑人垃圾人的例子。 它们显示了它如何直观地影响从模型计算的预期回报。

Mankert（2006）提供了模型的详细演练，并提供了Black-Litterman“主公式”的两个规范之间的详细转换，用于估计的资产回报。 她从抽样理论的角度探讨了这个问题，并在替代参考模型的背景下提供了一些关于值τ的新直觉。

Meucci （2006） 提供了一种在 Black-Litterman 中使用非正常视图的方法。 Meucci（2008）将这种方法扩展到任何模型parameter，并允许对完整分布进行分析以及情景分析。

Beach和Orlov（2006）说明了使用GARCH模型生成视图。他们使用20个发达国家的国际公平模型。 它们显示了当投资者对τ使用不同的值时，结果如何变化。 他们没有提供有关视图不确定性的确切细节，并且似乎正在使用替代参考模型，即使他们的技术可以应用于规范参考模型。

Braga和Natale（2007）描述了一种使用跟踪误差波动率（TEV）校准视图中不确定性的方法。 它们为后验估计提供了对各种观点的敏感性。

[验证] 这个 Metric以其 在主动投资组合管理中的使用而闻名。 他们使用替代参考模型，但他们的工作可以很好地应用于规范参考模型。

Martellini 和 Ziemann （2007）描述了对冲基金基金的积极管理方法。

y使用VaR作为逆向优化的目标函数，他们使用CAPM模型的变体进行扩展，包括偏度和峰度来确定其中性投资组合。 他们使用因子模型来生成安金，然后将排名转换为他们对视图的信心。他们不使用模型的贝叶斯特征，而是使用点估计，因此没有关于其估计精度的信息。

Giacommeti等人（2007）提供了一种使用稳定的帕雷蒂分布而不是Black and Litterman（1992 ）中描述的正态分布来计算中性投资组合的方法。 他们还对投资组合选择模型使用多种不同的风险度量;方差VaR和CVaR，

Cheung（2009 ）引入了 增强模型的概念。 此版本的模型集成了因子模型，并对因子收益进行联合估计。 Cheung使用替代参考模型，但他的模型变体可以很容易地使用规范参考模型。

Bertsimas等人（2013）他们 介绍了一种通过将视图投资组合权重与先前协方差矩阵的特征值进行比较来衡量视图与先前估计的对齐的方法。

Michaud等人（2013）对替代参考模型提出了尖锐的批评。 它确实是事实和意见的混合体，只有统计方法才能产生有效的先前估计。 由于它侧重于替代参考模型（本文致力于点估计问题的重要部分），因此其中大部分与规范参考模型无关。 此外，基本论证将读者限制在时间序列的基本统计属性上（基本上忽略了非稳态y和自回归属性），而忽略了更丰富的，最先进的计量经济学模型。

多年来，Christodoulakis（2002）和Da和Jagnannathan（2005）还有一些额外的教学笔记，它们为class室的讨论提供了非常基本的想法 。 第一个描述了典型参考模型，但没有解释后验方差代表什么。 第二个快速描述模型，然后使用一个示例来说明到达模型的各种输入的一些方法。作者使用替代参考模型，因为它们包括tau，但没有计算更新的后验协方差。

与任何参考模型一起呈现的大部分工作都可以与Canonical一起使用

参考模型，即使它最初是为替代参考模型制定的。 在本文中的后面，我们将展示这些结果中有多少可以推广到与规范参考模型一起使用。

## BL的估计模型

返回的参考模型是构建BlackLitterman模型其余部分的基础。它包括关于哪些变量是随机的，哪些不是随机的假设。它还定义了哪些参数已建模，哪些参数未建模。最重要的是，一些关于BlackLitterman模型的论文作者使用参考模型，例如替代参考模型或BeyondBlackLitterman，它们与Black and Litterman（1992）最初指定的规范模型没有相同的理论基础。

我们从正态分布的预期收益开始

1. r ~ N(μ, Σ)

BlackLitterman模型的基本目标是对这些预期收益进行建模，假设这些预期收益呈正态分布，均值μ和方差Σ。请注意，我们至少需要这些值，预期回报和协方差矩阵作为投资组合选择模型的输入。我们将未知平均回报μ定义为随机变量本身分布为

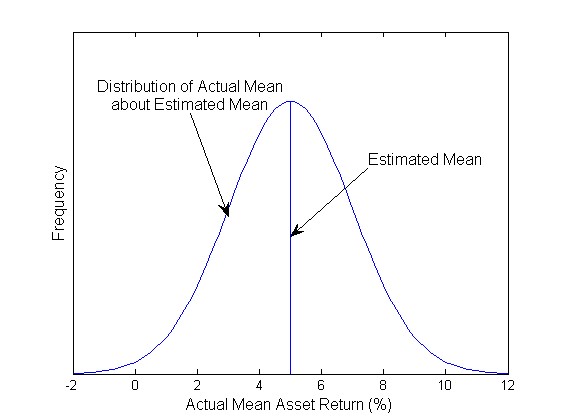
μ~ N(π, Σπ)

π是我们对t均值的估计，Σπ是未知均值的方差，μ关于我们的估计。查看这种简单线性关系的另一种方法显示在下面的公式中。

1. μ=π+ε

先验收益通常分布在π+在扰动值ε周围。 下图显示了实际均值的分布，大约估计均值为 5%，标准差为2%（或方差为0.0004）。我们可以看到，从峰的宽度来看，这不是一个非常精确的估计。

图 1 -关于估计平均值的实际均值分布



ε呈正态分布，均值为0，方差Σπ，并假定与μ不相关。我们可以通过将Σr定义为关于估计π的方差来完成参考模型。 根据公式（2）和上述假设ε和μ不相关，则计算Σr的公式为：

1. **Σ r =Σ+Σπ**

公式（3）告诉我们方差之间的正确关系是（Σ r ≥ Σ，Σπ）。

我们可以在边界条件下检查参考模型，以确保其正确。 在没有估计误差的情况下，例如 ε ≡ 0 ，则 Σ r = Σ。随着我们的估计变得更糟，例如Σπ增加，然后Σr也增加。

BL模型的规范参考模型预期收益为

1. *r*~*N* （π，Σ r）

关于规范的BlackLitterman参考模型的一个常见误解是公式（1）是参考模型，而μ是点估计。我们之前已将此方法标记为备用参考模型。几位作者从这个角度处理这个问题，所以我们不能忽视它，但它是一个根本不同的模式。在考虑各种BlackLitterman实现的结果时，重要的是要了解正在使用哪个参考模型，以便了解各种参数将如何影响结果。

## 计算均衡回报

Black-Litterman模型从先前估计回报的中性均衡投资组合开始。 该模型依赖于一般均衡理论来说明，如果总投资组合处于均衡状态，则每个子投资组合也必须处于均衡状态。它可以与任何实用程序功能一起使用，使其非常灵活。在实践中，大多数从业者使用二次效用函数并假设无风险资产，因此均衡模型简化为资本资产定价模型（CAPM）。 在这种情况下，中性投资组合是CAPM市场投资组合。列出的一些参考文献使用了其他效用函数，最著名的是Bertsimas（2013），但其他参考文献考虑了CVaR和其他投资组合风险指标，但没有应用相同的理论基础。为了保持模型的对称性，实践者应该使用相同的效用函数来识别中性投资组合以及投资组合选择区域。

在这里，我们将使用二次效用函数、CAPM和未共和均值方差，因为它是一个很好理解的模型。根据我们之前的假设，BlackLitterman模型的先验分布是CAPM市场投资组合的估计平均超额回报。计算 CAPM 均衡超额回报的过程很简单。

CAPM 基于风险（通过回报标准差衡量）和回报之间存在线性关系的概念。 此外，它要求回报呈正态分布。此模型的形式为

(5)*E*（r）=r *f*  +β*r* *m*+α

其中

*r f* 无风险利率。

*r m*市场投资组合的超额回报。

β 回归系数计算公式为 β=ρ \* （）

α 剩余或资产特定（特质）超额收益。

在CAPM下，与资产相关的特殊风险与其他资产的风险无关，这种风险可以通过多样化来降低。 因此，投资者因承担以β衡量的系统性风险而获得奖励，但因承担与α相关的特殊风险而获得奖励。在CAPM世界中，所有投资者都应该持有相同的风险投资组合，即CAPM市场投资组合。 **由于所有投资者仅在市场投资组合中持有风险资产，因此在均衡时，各种资产的市值将决定其在市场投资组合中的权重**。CAPM市场投资组合在[[3]](#footnote-3)有效前沿的任何投资组合中具有最大的夏普比率。投资者还可以投资无风险资产。这种无风险资产在投资者关注的时间段内基本上具有固定的正回报。它通常是投资者所在货币的主权债券收益率曲线中的某个期限 。根据资产配置决策的框架，这种无风险资产的范围可以从4周的国库券（1个月期限）到20年的通胀保值债券（20年期限）。请注意，CAPM市场投资组合包含所有可投资资产，因此很难实际指定。 因为我们处于均衡状态，所以所有子市场也必须处于均衡状态，因此我们选择使用的任何子市场都是全球均衡的一部分。虽然这使我们能够反向优化市值和协方差矩阵的超额回报，但从这一点开始进行正向优化以确定CAPM内的投资者最佳投资组合是有问题的，因为我们没有整个市场投资组合的信息。 一般来说，这实际上不是投资者在问的问题，他们通常会选择一个可投资的宇宙，并希望在宇宙中获得最佳的资产配置，因此市场投资组合的理论问题可以忽略不计。

资本市场线是一条贯穿无风险利率和CAPM市场投资组合的线。与CAPM密切相关的双基金分离定理指出，所有投资者都应在资本市场线上持有投资组合。 资本市场线上的任何投资组合都主导着高效前沿的所有投资组合，CAPM市场投资组合是高效前沿和资本市场线上的唯一点。根据他们的风险厌恶程度，投资者将在无风险资产和/或CAPM市场投资组合中持有任意部分财富。

下图说明了高效前沿线和资本市场线之间的关系。

图2 - 高效边界

图示

描述已自动生成

由于我们从市场投资组合开始，我们将从一组权重开始，这些权重都大于零，自然加起来为1。 市场投资组合仅包括风险资产，因为根据定义，投资者只因承担系统性风险而获得奖励。 因此，在CAPM中，β=0的无风险资产将不在市场投资组合中。稍后我们将看到我们的贝叶斯投资者可能会根据他们对回报估计的信心来投资无风险资产。

我们将通过断言回报的协方差矩阵 Σ 是已知的来解决这个问题。 实际上，此协方差矩阵是根据历史回报数据估计的。 它通常从更高频率的数据计算出来，然后放大到资产配置问题所需的时间范围。 通过从实际历史数据中计算它，我们可以确保协方差矩阵是正定的。 如果不将估计过程基于实际数据，则在确保协方差矩阵为正确定时会涉及重大问题。然而，我们可以对协方差矩阵应用收缩或随机矩阵理论过滤器，以使其更加健壮。

对于本节的其余部分，我们将使用一个通用的符号， 类似于 He and Litterman （1999） 中用于公式中所有项的符号。 请注意，此表示法与贝叶斯理论部分中使用的表示法不同且冲突。

在这里，我们从二次 utility 函数推导出“逆向优化”方程

(6)

U投资者实用程序，这是均值-方差优化期间的目标函数。

w投资于每项资产的权重向量

Π每种资产的均衡超额收益向量

δ 风险规避参数

Σ 资产超额收益的协方差矩阵

U 是一个凸函数，因此它将具有 单个全局最大值。如果我们在没有约束的情况下最大化效用，则存在一个封闭形式解决方案。我们通过取 （6） 相对于权重 （w） 的一阶导数并将其设置为 0 来找到确切的解决方案 。

求解 Π（超额收益向量）可得到：

1. P = δΣw

为了使用公式（7）求解CAPM市场投资组合，我们需要有一个δ值，即市场的风险规避系数。 找到δ的一种方法是将（7） 的两边乘以 wT ，然后用标量项替换向量项。

（r – rf） = δσ2

在这里，我们在均衡时的表达式是，投资组合的超额回报等于风险厌恶参数（夏普）乘以投资组合的方差。

1. δ = （r – r f） / σ2

r 市场投资组合的总回报 （r = wTΠ + r f）

r f无风险利率

σ-2 市场投资组合的方差 （σ2 = wTΣw）

大多数作者指定了他们使用的δ的值。 Bevan和Winkelmann（1998）描述了他们根据经验将回报校准为平均夏普比率的过程。 对于全球固定收益（他们的专业领域），他们使用1.0的Sh arpe比率。 Black和 Litterman （1992）在他们论文的例子中使用了接近0.5的夏普比率。

给定夏普比率，我们可以根据夏普比率重写δ公式（8）

因此，我们可以根据公式（8）或（9）来校准我们的回报。作为分析的一部分，我们必须得出我们选择使用的公式右侧的术语。 对于公式（8）;这是 R、RF 和σ2。 为了计算δ的值。 对于公式（9），这是夏普比率和σ。

为了使用公式（8），我们需要市场投资组合的隐含回报，这可能比市场投资组合的夏普比率更难估计。

一旦我们有了δ的值，我们就将w、δ和Σ分解 为 公式（7），并生成一组均衡资产回报。 公式（7）是逆向优化问题的闭式解，用于在没有连续性的情况下计算资产回报，给定最优均值-方差组合。 我们可以重新排列公式 （7），以产生在没有约束的情况下用于最佳投资组合权重的封闭形式计算的公式。

Herold（2005）提供了在存在预算或完全投资（Σw=1）约束等条件的情况下如何计算隐含回报的见解。他说明了在逆向优化过程中，如果约束被假定为不具有约束力，而约束实际上对给定的p对开本具有约束力，那么在逆向优化过程中如何引入错误。 请注意，由于我们处理的市场投资组合只有正权重，总和为1，因此我们可以有把握地假设反向优化没有约束约束。唯一缺少的部分是均值的估计方差。 回顾参考模型，我们需要Σπ(**估计误差**) Black和Litterman做了一个简化的假设，即估计误差的协方差矩阵的结构与回报Σ的协方差成正比。 他们创建了一个参数τ，作为比例常数。 给定该假设， Σ π = τΣ，则先验分布 P（A）（） 为：

1. P（A） ~ N（Π， τΣ）， ~ N（P（A）， Σ）

这是BL模型的先验分布。 它表示我们对均值的估计值，表示为有关估计值的实际未知均值的分布。

使用公式 （4），我们可以将公式 （11） 重写为

1. rA ~ N（Π， （1 + τ）Σ）

人们经常写到，没有观点并使用不受约束的均值方差portfolio选择模型的投资者将100%投资于中性投资组合，但这只有在他们应用预算约束时才是正确的。 由于他们在估计中的不确定性，他们将在中性投资组合中投资1/（1+τ），在无风险资产中投资τ/（1+τ）。 我们可以看到这种情况如下，从 （7） 开始：

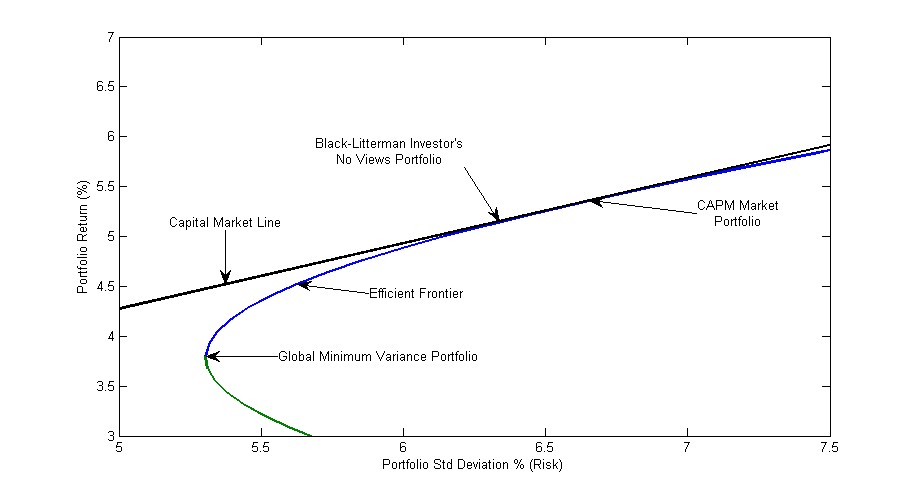
*w*= Π

w ̂= Π

w ̂= Π w ̂=（1/1+τ）*w*

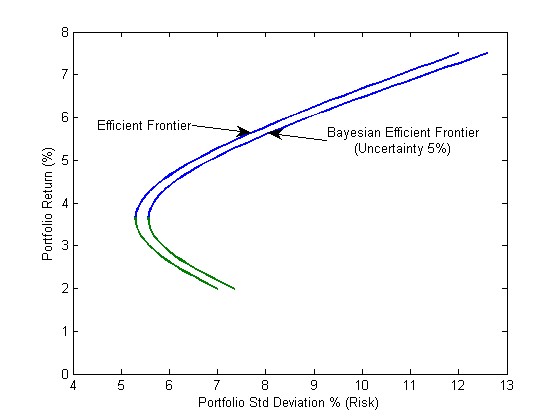
下图以图形方式说明了此概念。

图3 - 无观点情况下的投资者投资组合



或者，如果我们绘制由增加的协方差矩阵和预算约束生成的有效边界，我们可以将贝叶斯有效边界视为向右移动。 在这种情况下，不确定性只是在风险/回报空间中将每个点进一步推向右边。

图 4 - 风险调整贝叶斯有效边界



## 指定观点

本节将描述指定投资者对估计平均超额回报的看法的过程。

我们将投资者观点的组合定义为条件分布。首先，通过构造，我们将要求每个视图都是唯一的，并且与其他视图不相关。这将为条件分布提供协方差矩阵将对角线的属性，所有对角线条目都等于0。我们以这种方式约束问题，以提高结果的稳定性并简化问题。估计视图之间的协方差比估计观点方差更复杂且容易出错。其次，我们将要求视图完全投入，要么视图中的权重总和为零（相对视图）要么是1（绝对视图）。我们不需要查看任何或所有资产。此外，实际上存在冲突的观点，混合过程将根据对视图的置信度和对先验的置信度合并视图。

我们将使用以下矩阵表示投资者对 n 项资产的 k 观点

* P，每个观点中资产权重的 k×n 矩阵。 对于相对观点，权重的总和将为0，对于绝对视图，权重的总和将为1。不同的作者以不同的方式计算观点中的各种权重，He and Litterman （1999） 和 Idzorek （2005） 使用市值 n 加权方案，而 Satchell 和 Scowcroft （2000）在他们的例子中使用相等的加权方案。 在实践中，权重将是一种混合，具体取决于用于估计观点返回的过程。
* Q，每个观点收益的 k×1 向量。
* Ω观点协方差的 k×k 矩阵。 Ω是对角线的，因为观点需要独立且不相关。称为投资者观点的置信度。 Ω的第 i 个对角线元素表示为 ωi。

我们不要求 P 是可验证的。 Meucci（2006）描述了一种增强矩阵以使P矩阵可逆而不改变净结果的方法。

Ω在所有非对角线元素上都是对称的零，但如果投资者确定观点，对角线上也可能为零。 这意味着Ω可能是可逆的，也可能不是可逆的。 在实际层面上，我们可以要求 ω > 0，以便Ω是可逆的，但我们将重新表述问题，以便不需要反转Ω。

作为如何填充这些矩阵的示例，我们将研究一些投资者的观点。 我们的示例将有四个资产和两个视图。 首先，相对观点认为资产1将自信地跑赢资产32%。ω1.其次，绝对观点认为资产 2 将返回 3%，置信度为 ω 2。 请注意，投资者对资产4没有看法，因此不应直接调整其回报。 这些视图指定如下：

图片包含 图示

描述已自动生成

给定视图的这种规范，我们可以将观点空间中的条件分布均值和方差表示为 P（B|A） ~ N（Q， Ω）

我们通常无法将其转换为资产空间的有用表达式，因为相对观点和绝对观点混合在一起，并且因为P矩阵不需要是全秩的。如果我们确实在资产空间中表达了观点，则公式如下所示。

(13) P（B|A） ~ N（ Q，）

这种表示没有任何实际用途。 不完整视图和相对视图使方差不可逆，相对视图也会影响平均项。请记住，P可能不是可逆的，即使P是可逆的[P T Ω-1 P]也可能不是可逆的，使得这个表达式在实践中无法评估。 幸运的是，要使用Black-Litterman模型，我们不需要计算公式（13）。 但是，看看视图如何投影到资产空间中很有趣。

# 指定Ω

Ω，观点的方差与投资者对观点的了解成反比，但是基本的BlackLitterman模型并没有提供量化这种关系的直观方法。 由投资者计算Ω观点的差异。

有几种方法可以计算Ω。

* 与前验方差成正比
* 使用置信区间
* 在因子模型中使用残差方差
* 使用 Idzorek 的方法指定沿重量维度的置信度

## 与先验方差成正比

我们可以假设观点的方差与资产回报的方差成正比，就像先验分布的方差一样。 他和Litterman（1999）以及Meucci（2006）都使用这种方法，尽管他们使用的方式不同。 他和Litterman（1999）将vie ws的方差设定如下：

（14） 

或



这种对观点方差或不确定性的规范基本上平等地加权投资者的观点和市场均衡权重。通过在表达式中包含 τ，回报的后验估计也 变得独立于 τ。 这似乎是文献中最常用的方法。

Meucci （2006） 根本不在乎对角线化，只是 设置



他将 c 设置为 >1，c 的一个明显选择。我们稍后将看到，这种形式的观点方差有助于对BL公式进行一些简化。

## 使用置信区间

投资者可以使用估计平均回报周围的置信区间来指定方差，例如

资产的平均回报率估计为3%，预计68%的可能性在区间内（2.0%，4.0%）。知道 68% 的正态分布落在平均值的 1 个标准差范围内，我们可以将其转换为 （1%） 视图的方差2。

请注意，Ω均值估计值的不确定性，我们没有指定均值的回报方差。 视图方差的这种公式与规范参考模型一致。

## 使用因子模型中残差的方差

如果投资者 使用因子模型来计算视图，他们可以使用模型残差的方差来驱动回报估计的方差。 收益因子模型的一般表达式为：

*n*

1. *r*=∑*i f i*

*i*=1

哪里

*r* 是资产的回报

*i* 是因子 （i） 的因子载荷 *f*  i 是因子 （i） 的收益

 是独立的正态分布残差

因子模型回报方差的一般表达式为：

1. *V r*=*BV* *F**BT**V* 

*B* 是因子载荷矩阵

*F* 是各种因素导致的回报向量

给定公式 （15），并假设ε是独立的和正态分布的，那么我们可以直接计算ε的方差作为回归的一部分。 虽然 回归可能会产生完整的协方差矩阵，但如果仅使用对角元素，混合模型将更加稳健。

Beach和Orlov（2006）使用GARCH风格的因子模型来生成用于Black-Litterman模型的视图，描述了他们的工作。 它们使用 GARCH 模型生成视图的精度。

## 使用 伊佐雷克的方法

Idzorek （2005） 描述了一种方法，该方法根据从 0% 置信度到 100% 置信度的区间上权重的百分比移动来指定视图中的置信度。 我们将 在扩展部分查看 Idzorek 的算法。

## 估算模型

最初的BlackLitterman论文引用了Theil的混合估计模型而不是贝叶斯估计模型，尽管我们可以从这两种方法中获得相似的结果。我们选择从泰尔的模型开始，因为它更简单、更干净。我们还通过贝叶斯版本的推导来确保完整性。

无论使用哪种方法，我们都将使用规范的BL模型。 在此参考模型中，估计模型用于计算估计收益的分布，然后估计 平均收益的分布。 这种区别对于理解用于τ和Ω的值以及计算回报的先验和后验分布的方差非常重要。

由e刺激模型生成的均值的后验估计比先前估计或投资者的观点更精确。 请注意，我们预计收益分布的方差不会发生较大变化，因为我们对均值的估计更精确。 这方面的原型示例是混合分布 P（A） ~ N（10%， 20%） 和 P（B|A） ~ N（12%， 20%）。 如果我们以直接的方式应用任一估计模型，P（A|B） ~ N（11%， 10%）。 显然，对于财务数据，我们并没有真正削减1 /2中关于平均值的回报分布方差，因为我们对平均值的估计略好一些。 在这种情况下，均值是随机变量，因此我们后验的方差对应于 mea n 返回附近估计均值的方差; 不是关于平均回报的回报分布的方差。 在这种情况下，P（A|B） ~ N（11%， 10%） 是有道理的。 通过将这两个均值估计值混合在一起，我们得到的均值估计值的不确定性（方差较小）比任何一个估计值都要小得多，即使我们对 均值周围的实际回报分布没有更好的估计。

# 泰尔混合估计模型

Theil的混合估计模型是为了从完整的先验数据和部分条件数据的混合中估计参数而创建的。 这很适合我们的问题，因为它允许我们仅对资产回报的子集发表意见，不需要对所有资产回报发表意见。 视图也可以针对单个资产或资产的任意组合表示。 这些观点甚至不需要一致，估计模型将根据投资者的信心考虑每个观点 。

Theil的混合估计模型从 要估计的参数的线性模型开始。 我们可以使用参考模型中的公式（2）作为起点。

我们的简单线性模型如下所示：

(17) *x*b=p+*u*

哪里

 是 资产均衡收益的 n x 1 向量。

*x* 是 n x n 矩阵 In，它是我们模型的因子载荷。  是资产返还过程中未知手段的 n x 1 向量。

*u* 是回归中残差的 n x n 矩阵，其中 *E**u*=0*;V* u=*E* *u' u*= 且 Φ 是非奇异的。

Black-Litterman模型使用非常简单的线性模型，每种资产的预期回报由系数为1的单个因子建模。 因此，*x* 是单位矩阵。 假设 β 和 *u* 是独立的，*并且 x* 是常数，那么我们可以对 a s π方差进行建模：

*V *=x *'V* x*V* *u*

可以简化为：（18） *V* =

哪里

 是前面使用的收益的历史协方差矩阵。

 是残差或关于实际均值的估计值的协方差。

这又回到了参考模型中的公式（3）。 估计收益的总方差是实际回报过程的方差加上均值估计的方差之和 。 我们将在本文后面再次回到这种关系。

接下来， 我们考虑一些额外的信息，我们希望将其与先前的信息相结合。 这些信息可以是主观观点，也可以是从统计数据中得出的。 我们还将允许它不完整，这意味着我们可能没有对每个资产回报的估计。

1. *p*β=*q*+*v*

其中 *q* 是视图返回的 k x 1 向量。 *p* 是将视图映射到资产的 k x n 矩阵。

是 资产返还过程的未知手段的 n x 1 向量。

*v 是* 回归残差的 k x 1 向量，其中 *E**v*=0 *;V* v=*E* *v' v*= 且Ω为非奇异。

我们可以通过编写以下内容来组合先验信息和条件信息：[*xp*]β̂=[π*q*]+[*uv*]

其中残差的期望值为 0，残差方差的期望值 为

*V*  [uv]=*E*[*uv*][*u'v*  *'*  ]]=[0 0 ]

然后，我们可以应用广义最小二乘过程，从而将  估计为

− − −

=[*x' p'*]0]1[*x*]]1[*x ' p'*][0]1[]

[

[

0  *p* 0  *q*

这可以重写为没有矩阵符号

1. =[ x '−1 x*p*' −1 p]−1[ *x*'−1 *p'*−1 *q*]

对于每个资产的单因子的Black-Litterman 模型 ，我们可以删除x，因为它是单位矩阵。 如果要使用多因子模型进行均衡，则x将是均衡因子载荷矩阵。

1. =[−1 p' −1 *p*]−1[−1*p'* −1*q*]

此新是估计值的加权平均值，其中加权因子是估计值的精度。 精度是方差的倒数。后验估计也是给定数据的最佳线性无偏估计，nd具有最小化残差方差的特性。请注意，给定一个新的，我们也应该对残差的方差有一个更新的期望。

如果我们对先验使用因子模型，那么我们将在公式中保留 x，即因子 weightings。 这将为我们提供一个多因素模型，其中所有因素都将被定价到均衡中。

我们可以根据  的估计值和新的残差 *u* 重新表述我们的组合关系，如下所示

[*xp*]β̂=[π*q*]+*u*̃

再次 *E**u*=0 ， 因此我们可以导出新残差方差的表达式为：

（22） *V*  *u*=*E**u* *' u*=[−1 p' −1 *p*]−1，总方差为

*V *[ *y* ]= V *V* *u*

我们在本节开始时断言退货过程的差异是已知数量。 改进的数量  估计不会改变我们对收益分布方差 Σ 的估计。 由于我们改进了估计值，我们确实预计估计值（残差）的方差已减小，因此总方差已更改。我们可以简化方差公式

（18） 至

(23) *V* [ *y* ]=*V* *u*

这是一个明显直观的结果，与金融时间序列的现实一致。 我们将分布均值的两个估计值结合起来，以得出更好的均值估计值。 此估计值的方差已减小，但基础过程的临时方差未更改。 鉴于我们对过程的不确定估计，我们估计过程的总方差也逐步改善，但它具有渐近极限，即它不能小于实际基础过程的方差 。

这是计算规范参考模型后验分布协方差的约定，如He and Litterman （1999）所示。

在没有 视图的情况下，公式 （23）简化为

*V* [ *和* ]=

这是先前回报分布的方差。

附录A包含公式（21）和（22）的更详细的推导。

# 使用贝叶斯定理作为估计模型

有关贝叶斯定理的简要介绍，请参阅附录B，因为它用于构建Black-Litterman模型。

在Black-Litterman模型中，先验分布基于均衡隐含超额收益。Black-Litterman 模型做出的主要假设之一是，先验估计的协方差与实际回报的协方差相关，但这两个量是独立的。 参数 τ 将用作比例常数。BlackLitterman模型的先验分布在公式（11）中指定。

P（A） ~ N（Π， τΣ）， ~ N（P（A）， Σ）

~ N（Π， （1 + τ）Σ）

条件分布基于投资者的观点。 投资者的观点被指定为资产组合的回报，每种观点都有一个不确定性，这将影响整个混合过程。 投资者观点的条件分布在公式（13）中具体说明。

(13) P（B|A） ~ N（ Q，）

贝叶斯定理的后验分布是先验估计和条件估计的精确加权平均值。 现在，我们可以将贝叶斯理论应用于混合先验分布和条件分布的问题，以创建资产回报的新后验分布。给定方程（11）和（13），分别对于我们的先验分布和条件分布，我们可以应用贝叶斯定理，并推导出以下资产回报的后验分布公式。



这有时被称为BL主公式。公式的完整推导显示在附录B中。 对于收益和协方差 （M） 的相同公式的替代表示形式为

手机屏幕的截图

描述已自动生成

式（25）的推导见附录D。 请记住，M（后验方差）是关于实际均值的后验均值估计值的方差。 它是后验均值估计中的不确定性 ， 而不是回报的方差。

计算回报的后验协方差 需要将估计值的方差与估计值的标准误相加，与 （23） 中相同。 这在He and Litterman （1999）中有所提及，但在任何其他论文中都没有提到。

1. Σ p = S + M

S从 （26） 中得出后验方差，我们得到

Σp = Σ + （（τΣ）-1 + P TΩ-1 P）-1

在没有意见的情况下，这减少到

1. Σp = Σ + （τΣ） = （1 + τ）Σ

因此，在没有观点的情况下应用BlackLitterman模型时，估计收益的方差将大于先前的分布方差。 我们在He and Litterman（1999）中显示的结果中看到这个公式的影响。 在他们的结果中，如果投资者没有观点，他们的权重总和小于1。[[4]](#footnote-4) Idzorek （2005） 和大多数其他 authors 不计算新的后验方差，而是使用关于平均值的回报的已知输入方差。

如果我们的投资者只有部分观点，即对资产子集的看法，那么通过使用变量的后验估计，我们将后验权重向方差较低（估计均值精度较高）的资产倾斜，而远离方差较高的资产（估计均值精度较低）。 因此 ，视图和更新的协变量ce 的存在将使优化器倾向于使用这些资产或不使用这些资产。 如果我们使用τ的小值，这种倾斜不会很大，但它是可以测量的。

由于我们经常从历史数据中构建已知的回报协方差矩阵Σ，因此我们可以使用基本统计中的方法来计算 τ，因为 τΣ 类似于标准误差。 我们还可以根据我们对先验分布的置信度来估计 τ。请注意，这两种技术都为选择更接近 0 而不是 1 的 τ 值提供了一些直觉。 Black and Litterman （1992）、He and Litterman （1999） 和 Idzorek （2005） 都表明，在他们的计算中，他们使用了 τ 的小值，大约为 0.025 – 0.050。 Satchell 和 Scowcroft （2000） 指出，许多 investor 在 1 周围使用τ，这与数据没有直观的联系，实际上表明他们的论文使用了替代参考模型。

我们可以通过查看结果是否符合我们在边界条件下的直觉来检查我们的结果。

给定公式（25），很容易让Ω →0表示观点在100%确定性下的回报 是

1.  = P *T*  [P  *P T*  ]−1[*Q*−*P*]

因此，在视图的100%确定性下，估计的回报对所使用的τ值不敏感。

此外，如果 P 是可逆的，这意味着我们已经提供了对每个资产的视图， 那么

Π̂=*P*−1*Q*

如果投资者不确定他们的观点，那么Ω → ∞，那么公式（25）可以简化为：

 =

找到一种易于分析的方法来表达和计算100%确定性的后验方差是一个具有挑战性的问题。

使用伍德伯里矩阵恒等式从 （26） 导出的后验方差的替代公式 为

1. *M* =− P T *P* P *T*−1*P* 

如果Ω → 0（视图的总置信度，并且每个资产至少在一个视图中），则公式 （30） 可以减少到 M = 0。 另一方面，如果投资者对他们的观点没有信心，Ω → ∞，那么公式（30）可以简化为M = τΣ。

# 替代参考模型

本节将讨论与布莱克-垃圾人估计模型一起使用的最常见的替代参考模型。

最常见的替代参考模型是Satchell and Scowcroft（2000）中使用的模型，以及Meucci在引入“Beyond Black-Litterman”之前的工作中使用的模型。

*E**r*~*N*  *，*

在此参考模型中，μ呈正态分布，方差为 Σ。 我们估计μ，但μ不被视为随机变量。 这通常被描述为τ = 1，但更准确地说，我们正在进行点估计，因此消除了τ作为参数。 在这个模型中，Ω成为未知均值回报视图的回报的协方差，就像 Σ 是先验回报的协方差 一样。 Gven 我们现在使用点估计，后验现在是点估计，我们不再担心估计的后验协方差。 在此模型中，我们没有后验精度可在投资组合选择模型的下游使用。

We 重写公式 （25），注意我们可以绕过 τ 项。

 = P T [P  *PT* ]−1[*Q*−*P* ]



现在我们看到 τ 只出现在这个公式中的一个项中。 由于备择参考模型不包括更新估计值的协方差，因此这是唯一的公式。 鉴于投资者同时选择Ω和τ来控制先验和他们的观点的混合，我们可以删除其中一个术语。 由于 τ 是所有视图的单个项，并且 Ω 每个视图都有一个单独的元素，因此我们将保留Ω。 然后，我们可以重写均值的后验估计，如下所示。

(31)  = P T [P  *PT* ]−1[*Q*−*P* ]

这个新参考模型的主要特征是，首先τ消失了，其次，在没有观点的情况下，投资者的投资组合权重等于均衡投资组合权重。 最后，在实施时，不需要或使用公式（26）和r（27）。

请注意，除了Black and Litterman （1992）和He and Litterman （1999）之外，Meucci （2008）之前的作者都没有提到规范参考模型的细节，或者不同的作者实际上使用相当不同的租金参考模型的事实。

在规范参考模型中，关于估计的未知均值的更新后验协方差将小于先验估计或条件估计的协方差，这表明添加更多信息离子将降低模型的不确定性。 公式（27）的回报方差永远不会小于先前的回报方差。 这符合我们的直觉，因为添加更多信息应该会减少估计的不确定性。鉴于 该值（M）存在一定的不确定性，则公式（27）提供了比先前回报方差更好的估计器。

# τ的影响

参数 τ 的含义和影响给 Black-Litterman 模型的任何用户都带来了很大的困惑。 我们知道，使用规范参考模型的投资者使用τ，并且在模型中具有非常精确的含义。 为 τ 选择本质上随机值的作者可能没有使用规范参考模型，而是使用替代参考模型。

给定规范参考模型，我们仍然可以执行练习来了解 τ 对结果的影响。 我们将从Ω的表达式开始，类似于 He and Litterman （1999）使用的表达式。我们将保留协方差矩阵的整个结构，而不是仅使用对角线，以使数学更简单。

1. =*P* *PT*

我们可以将其代入公式 （25） 作为

 = P *T*  [P *P* T ]−1[*Q*−*P* *T* ]

= P T [P P T P  P T ]−1[Q−P  *T*  ] = P T [2P  *P T* ]−1[*Q*− *P* *T* ]

= P T P *T*−1[*P*]−1[*Q*−*P* *T*]

=−1 *P*−1[*Q*−*P* *T* ]

1 −1 *Q*−*P**T*] =2  *P* [

1.  =[*P*−1*Q*−*T* ]

显然，使用公式（32）只是一种简化，并不符合投资者的观点，但我们仍然可以看到，设置Ω与τ成正比，将从的最终公式中消除τ 。 在规范参考模型中，它不会从后验协方差公式中消除τ（27）。在一般形式中，如果我们Ω表述为

1. =P*PT*

然后我们可以将公式 （33） 重写为

1.  = 1 [*P*−1*Q*−]

1

如果我们将公式 （32） 代入公式 （30），我们可以看到类似的结果。

*M*=− P T [P P  *T* ]−1 *P* 

=− P T [P  P T P P T]−1 P =− P *T* [2*P* P  *T* ]−1 *P*  

=−P *T*  P *T*−1−1P−1P*P*

=−

1. *M* =

请注意，τ 未从公式 （36） 中消除。我们还可以观察到，如果τ在1量级，并且我们使用公式（27），则平均值估计的不确定性将是回报方差的很大一部分。 使用备择参考模型，不执行后验方差计算 ，并且混合由回报方差加权。

在这两种情况下，我们对Ω的选择在后验分布的估计中均匀地加权了先验分布和条件分布。 这符合我们的直觉，因为我们认为我们已经混合了两种输入，对于这两种输入，我们都有相同程度的不确定性。 后验分布将是两个分布的平均值。

如果我们求解更有用的一般情况，即 Ω = α P（τΣ）PT 其中 α ≥ 0，代入

（25） 并遵循用于推导 （36） 的相同逻辑，我们得到

(37)  = 1 [ *P*−1*Q*−]

1

这种不确定性的参数化在Meucci （2005）中指定，它允许我们在对先验和视图使用相同的不确定性与必须为每个视图指定一个单独的和唯一的不确定性之间进行选择。 鉴于我们基本上将先验协方差矩阵乘以常数 t，他对视图不确定性的参数化不会对结果的稳定性产生负面影响。

请注意，这种对视图中不确定性的规范将假设从不相关的视图更改为与 先前回报具有相同相关性的观点。

总之，如果投资者使用替代参考模型并使Ω与Σ成正比，那么他们只需要校准比例常数α，这表明他们对自己的观点与均衡的相对信心。 如果他们使用规范参考模型并将Ω设置为与τΣ成正比，则回报估计将不依赖于τ的值，但回报的后验协方差将取决于τ的正确校准。

## 校准

本节将讨论一些选择和校准τ值的经验方法。

校准τ的第一种方法依赖于回退到基本统计数据。 估计分布的均值时，均值估计的不确定性（方差）将与样本数的倒数成正比。 假设我们从历史数据估计协方差矩阵， 则

= 1 最大似然估计量

*T*

= 1 最佳二次无偏估计量 *T* −*k*

T 样本数 k 资产数

还有其他估计器，但通常使用上面的第一个定义。 鉴于我们通常的目标是 60 左右的样本 数量 （5 年的每月样本），那么 τ 大约是 0.02。 这与几篇论文一致，这些论文表明他们在范围（0.025，0.05）中使用了τ值。

校准 τ 的最直观最简单的方法是作为先验均值估计值置信区间的一部分。 我们将用一个简单的例子来说明这个概念。 考虑 τ = 0.05 的场景，我们只考虑先验 es 时间为 7% 的单个资产作为超额回报，15% 作为关于平均值的已知回报标准差。 对于我们的观点，我们使用置信区间（1%，5%）和68%的置信区间。

我们将视图精度与先验精度的比率固定在两个 scenarios 之间，一个为 τ = 0.05，另一个为 τ = 1。 在第一种情况下，即使我们使用看似很小的τ = 0.05，根据置信区间的宽度，我们的先验估计的精度相对较低，因此后验估计值将朝着视图加权。 在 τ = 1 的第二种情况下，先验置信区间非常宽，以至于先验估计值接近无价值。 为了使后验估计在不同情景中保持一致，视图估计还具有较宽的置信区间，表明投资者对他们的任何估计都没有信心。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T | 先前 @ 68% 置信度 | 事先  精度 | 查看 s | 视图  精度 | 查看 @ 68% 置信度 | 视图/先验精度 |
| 0.05 | (4.6%, 9.4%) | 888 | 2.00% | 2500 | (1%, 5%) | 2.81 |
| 1.00 | (-8%, 22%) | 44.4 | 8.90% | 125 | (-5.9%, 11.9%) | 2.81 |

鉴于τ = 1情景的区间如此之宽，16%的置信度认为我们的资产的平均回报率低于-8%，很难想象对使用最终资产配置有太大的信心。 了解视图方差的τ和t的指定之间的相互作用至关重要。

请注意，此示例说明了规范参考模型和备用参考模型的参数之间的差异。 指定 τ = 1 是替代参考模型，但只会从规范参考模型生成垃圾输出。

最后，我们可以将τ校准为在给定先验分布的情况下投资于无风险资产的金额。 在这里，我们看到，鉴于公关观点，投资于风险资产的投资组合将是

*w*=[1]−1

因此 ，分配给资产的权重比 CAPM 市场权重小 [1/（1+τ）]。 这是因为我们的贝叶斯投资者对先前的估计不确定，他们不希望100%投资于 风险资产。

## 结果

本文档的这一部分将逐步比较不同作者的结果。 用于计算这些结果的 java 程序都可以作为 sourceforge.ne t 的 akutan 开源金融项目的一部分提供。 所有的数学函数都是使用Java的Colt开源数字库构建的。 选定的公式也可在网站 blacklitterman.org 上以 MATLAB 和/或 SciLab 脚本的形式提供 。 我的结果与作者报告的结果之间的任何微小差异 很可能是输入和/或结果四舍五入的结果。

在报告结果时，大多数作者只是使用后验均值和方差报告了来自无约束优化的投资组合权重。 鉴于向量 Π 是超额回报向量，那么我们不需要预算约束 （Σwi = 1），因为我们可以安全地假设任何“缺失”的权重都投资于 预期收益为 0 且方差为 0 的无风险资产。 此计算来自公式 （10）。

w = Π（δΣp）-1

作为我们算法的第一个测试，我们验证当投资者没有观点认为权重是正确的时，将公式（28）代入（10），我们得到wnv = Π（δ（1+τ）Σ）-1

(38) w nv = w/（1+τ）

鉴于此结果，很明显，当使用 Black-Litterman 参考模型时，没有视图的输出权重将受到 τ 选择的影响。 他和Litterman（1999）指出，如果我们的投资者是贝叶斯，那么他们将无法确定先前的分布，因此在开始时不会完全投资于风险投资组合。 这与公式（38）一致。

### 匹配他和垃圾人的结果

首先 ，我们将考虑He and Litterman （1999）中显示的结果。 这些研究最容易重现，因为它们清楚地实现了规范参考 模型 ，并且它们提供了在论文中重现其结果所需的所有数据。

他和 垃圾人 （1999） 设定

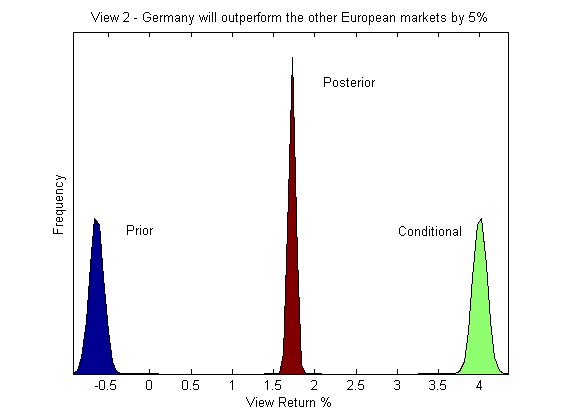
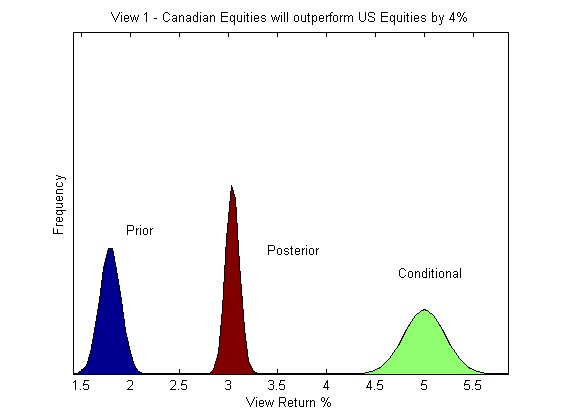
(39) Ω = diag（P T（τΣ）P）

这实质上使观点的稳定性等同于均衡估计的不确定性。 他们为 τ （0.05） 选择一个较小的值，并使用规范参考模型和公式 （30） 和 （27） 中计算的更新的回报后验方差。

表1 - 这些结果对应于[He and Litterman，1999]中的表7。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 第0 页 | 第1 页 | M | Weq/（1+τ） | 在\* | w\* - 在方程/（1+τ） 中 |
| 澳大利亚 | 0.0 | 0.0 | 4.3 | 16.4 | 1.5% | .0% |
| 加拿大 | 0.0 | 1.0 | 8.9 | 2.1% | 53.9% | 51.8% |
| 法国 | -0.295 | 0.0 | 9.3 | 5.0% | -.5% | -5.4% |
| 德国 | 1.0 | 0.0 | 10.6 | 5.2% | 23.6% | 18.4% |
| 日本 | 0.0 | 0.0 | 4.6 | 11.0% | 11.0% | .0% |
| 英国 | -0.705 | 0.0 | 6.9 | 11.8% | -1.1% | -13.0% |
| 美国 | 0.0 | -1.0 | 7.1 | 58.6% | 6.8% | -51.8% |
| q | 5.0 | 4.0 |  |  |  |  |
| H/T | .043 | .017 |
| L | .193 | .544 |

表1包含使用Black-Litterman的akutan实现计算的结果，均衡案例的输入数据以及投资者对He and Litterman（1999）的观点。 w\* 显示的值与他们论文中显示的值完全匹配。Figure 5 - 关于估计均值的实际均值分布



上图显示了问题中定义的每个视图的先前、视图和后验的 pdf。 y 轴在每个图形中使用相同的刻度。 请注意，在视图 1 中，视图（估计均值的 conditi onal 分布）更加分散，因为估计值的方差较大（估计值的精度较小）。 另请注意先验和视图的精度如何影响 pdf 上的精度（峰值宽度）。 在视图 1 中，视图不太精确，后部也不太精确。

### 匹配伊佐雷克的结果

文件的这一部分描述了重现Idzorek（2005）结果的努力。 在试图匹配Idzorek的结果时，我们发现他使用了替代参考模型。 留下Σ，即先前分配的收益的已知方差，作为后验收益的方差。 这与规范参考模型有很大差异，但最终差异仅为每项资产 50 个基点。 下面的表2和表3说明了他的论文中数据的计算结果，以及模型的两个版本之间的结果有何不同。

表2包含使用Idzorek（2005）和规范参考模型的数据生成的结果。 表 3 显示了与 Alternative 参考模型生成的相同结果。

表 2 – 包含 Idzorek 数据的规范参考模型（与 Idzorek 表 6 中的数据相对应）。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产类别 | M | W均衡器 | 在\* | 布莱克-垃圾人 参考模型 | 伊佐雷克 的结果 |
| 美国债券 | .07 | 18.87% | 28.96% | 10.09% | 10.54 |
| 国际债券 | .50 | 25.49% | 15.41% | -10.09% | -10.54 |
| 资产类别 | M | W均衡器 | 在\* | 布莱克-垃圾人 参考模型 | 伊佐雷克 的结果 |
| 美国乐金 | 6.50 | 11.80% | 9.27% | -2.52% | -2.73 |
| 美国LV | 4.33 | 11.80% | 14.32% | 2.52% | -2.73 |
| 美国新加坡 | 7.55 | 1.31% | 1.03% | -.28% | -0.30 |
| 美国西弗 | 3.94 | 1.31% | 1.59% | .28% | 0.30 |
| 国际开发 | 4.94 | 23.59% | 27.74% | 4.15% | 3.63 |
| 国际 电子工程师 | 6.84 | 3.40% | 3.40% | .0% | 0 |

请注意，表2中的结果很接近，但对于一些资产，差异约为50个基点。表3中显示的值在4个基点以内，与Idzorek报告的结果基本匹配。

表 3 – 包含 Idzorek 数据的替代参考模型（与 Idzorek 表 6 中的数据相对应）。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 国家 | M | W均衡器 | 在 | 另类  参考模型 | 伊佐雷克 的结果 |
| 美国债券 | .07 | 19.34% | 29.89% | 10.55% | 10.54 |
| 国际债券 | .50 | 26.13% | 15.58% | -10.55% | -10.54 |
| 美国乐金 | 6.50 | 12.09% | 9.37% | -2.72% | -2.73 |
| 美国LV | 4.33 | 12.09% | 14.81% | 2.72% | -2.73 |
| 美国新加坡 | 7.55 | 1.34% | 1.04% | -.30% | -0.30 |
| 美国西弗 | 3.94 | 1.34% | 1.64% | .30% | 0.30 |
| 国际开发 | 4.94 | 24.18% | 27.77% | 3.59% | 3.63 |
| 国际 电子工程师 | 6.84 | 3.49% | 3.49% | .0% | 0 |

### 其他工作

本节简要讨论了从布莱克-垃圾人模型的一些主要研究论文中复制结果的努力。

在关于Black-Litterman模型的主要论文中，有两篇非常有用，Satchell and Scowcroft（2000）和Black and Litterman （ 1992）。 Satchell and Scowcroft（2000）在他们的论文中没有提供足够的数据来重现他们的结果。 他们有几个例子，一个有11个国家的股票回报加上货币回报，另一个是15个国家。 他们没有为这两个示例提供协方差矩阵， 因此无法重现他们的分析。 通过重现他们的结果来确认他们使用Alernative Reference Model会很有趣。

Black和Litterman（1992）确实提供了他们分析的所有输入，但是他们选择了一个不平凡的例子，包括部分对冲的股票和债券回报。 这需要对逆向优化过程应用一些约束，而我们目前还无法制定这些约束。 我们计划继续这项工作，目的是验证Black and Litterman（1992）中使用的Black-Litterman实现的细节。

# 黑人垃圾人模型的扩展

在本节中，我们将介绍Idzorek （2005），Fusai and Meucci （2003），Krishnan和Mains（2006）以及Qian和Gorman （2001）中提出的Black-Litterman模型的扩展。

Idzorek（2005）提出了一种 以简单直接的方法校准投资者观点的信心或方差的方法。

接下来是关于极端或观点质量的测量的部分。 Fusai和Meucci（2003）提出了一种方法来衡量均值的后验估计与先前估计或其他一些估计的一致性。 Braga和Natale（2007）描述了如何使用跟踪误差来测量从均衡到后验投资组合的距离。我还包括关于使用相对熵来衡量视图质量的其他原创工作 。

最后，模型的较大扩展离子（如Krishnan和Mains（2006））提供了一种将其他因子纳入模型的方法。 Qian和Gorman（2001）提出了一种整合协方差矩阵视图和回报视图的方法。

## 伊佐雷克的 扩展

Idzorek的明显目标是降低非量化投资者的Black-Litterman模型的复杂性。 他通过允许投资者将投资者对观点的信心指定为百分比（0-100%）来实现这一点，其中信心度量确保后验权重从先前估计（0%）到条件估计（100%）的变化。 这种线性关系如下所示

(40) *置信度*=w −*wMKT*/W 100−*WMKT*

W 100 是视图中 100% 确定性下资产的权重 wMKT 是无视图下资产的权重 W 是指定视图下资产的权重。

他提供了一种方法来回退为每个视图生成适当倾斜（ 从之前到后部的权重变化）所需的 ω 值。 然后将这些值组合起来形成Ω，并使用模型计算后验估计值。

Idzorek 在他的公式中包含 τ，但由于他使用了替代参考模型和他的公式a （40），因此没有必要在 Idzorek 方法中使用 τ。

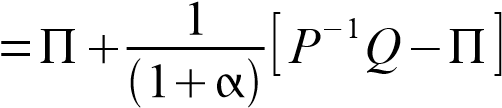
在他的论文中，他讨论了使用最小二乘法求解ω。 我们实际上可以通过分析来解决这个问题 5. 下一节将提供此解决方案所需公式的派生。

首先，我们将使用以下形式的视图的不确定性。 Idzorek 在这个公式中包含 τ，但他使用替代参考模型，因此我们可以从他的方法公式中删除 τ。

1. = *P* *PT*

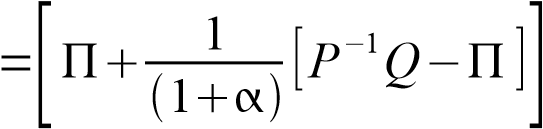
α，不确定性系数，是区间 [0， ∞] 中的标量。当投资者对他们的观点有100%的信心时，α将为0，当他们完全不确定时，α将是∞。请注意，公式（41）是精确的，它与公式（39）相同，这是He and Litterman （1999）使用的Ω，因为它是一个1x1矩阵。 这使我们能够找到一个封闭形式的解决方案来解决 Idzorek 信心Ω问题。

首先 我们代入公式 （37）

 

成公式（10）。

*w*= −1

1. *w*−1

现在我们可以在α的边界条件下求解公式（42）。

林 *， WMK* =−1

∞ lim *， w*100=*P*−1 *Q*−1 0

并重新组合（42）中的一些术语，我们得出

1. *w=−1* [1 ][ *P*−1  *Q*−1−−1]

# 1

将 w mk 和 w100 代入 （43） 我们得到

1][*w*100−*wMK*]



*在*

=

*在*

*MK*



[



1







5 感谢鲍里斯·格涅登科向我指出这一事实。

并将以上与公式（40）进行比较

*置信度*=w −w mk/w 100−*w* *mk*

我们看到

*置信度*= 1

1

如果我们解决α

(44) =1−置*信*度/*置信度*

使用公式（44）和（41），投资者可以轻松计算每个视图的ω值，然后将它们汇总到单个Ω矩阵中。 为了检查每个视图的结果，我们使用公式 （25） 求解后验估计回报，并将它们代入公式 （40）。 请注意，当投资者一次应用其所有观点时，观点之间的相互作用可能会将单个资产的后验估计从一次一个视图时产生的结果中拉开。

Idzorek 的方法大大简化了投资者在没有定量模型驱动该过程时指定观点不确定性的过程。 此外，此模型不会为流程增加有意义的复杂性。

## Idzorek扩展的一个例子

Idzorek 在他的论文中描述了实现他的扩展所需的步骤 ，但没有 提供一个完整的工作示例。 在本节中，我将从他在论文中留下的地方通过他的例子来研究。

Idzorek 的示例包括 3 个视图：

* 实习开发权益的绝对超额回报率为5.25%，信心为25.0%
* 国际债券的表现将超过美国债券25个基点，信心指数将超过50.0%
* 美国成长股的表现将超过美国价值股2%，信心指数为65.0%

在他的论文中，Idzorek定义了他的方法中的步骤，其中包括计算w100，然后在给定所需权重变化的情况下计算每个视图的ω。 从上一节中，我们可以看到，我们只需要对每个视图采取投资者的信心，将其插入公式（44）并计算alpha的值。 然后我们将 α、P 和 Σ 代入公式 （41） 并计算每个视图的 ω 值。 此时，我们可以组装我们的Ω矩阵，并继续使用公式 （24） 或 （25） 求解后验回报。

在处理示例时，我将显示每个视图的结果，包括 w mkt 和 w100，以使扩展的工作原理更加透明。 下面的表 4、5 和 6 分别显示了单个视图的结果。

表 4 – 视图 1 的校准结果

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 哦 | WMKT | 在\* | 100% | 隐含的信心 |
| 国际开发股权 | .002126625 | 24.18% | 25.46% | 29.28% | 25.00% |

表 5 – 视图 2 的校准结果

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 哦 | WMKT | 在\* | 100% | 隐含的信心 |
| 美国债券 | .000140650 | 19.34% | 29.06% | 38.78% | 50.00% |
| 国际债券 | .000140650 | 26.13% | 16.41% | 6.69% | 50.00% |

表 6 – 视图 3 的校准结果

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 哦 | WMKT | 在\* | 100% | 隐含的信心 |
| 美国乐金 | .000466108 | 12.09% | 9.49% | 8.09% | 65.00% |
| 美国LV | .000466108 | 12.09% | 14.69% | 16.09% | 65.00% |
| 美国新加坡 | .000466108 | 1.34% | 1.05% | .90% | 65.00% |
| 美国西弗 | .000466108 | 1.34% | 1.63% | 1.78% | 65.00% |

表 7 – Idzorek 置信度扩展示例的最终结果

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 视图 1 | 视图 2 | 视图 3 | µ | S | WMKT | 后面的  重量 | 改变 |
| 美国债券 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | .1 | 3.2 | 19.3% | 29.6% | 10.3% |
| 国际  债券 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | .5 | 8.5 | 26.1% | 15.8% | 10.3% |
| 美国乐金 | 0.0 | 0.0 | 0.9 | 6.3 | 24.5 | 12.1% | 8.9% | 3.2% |
| 美国LV | 0.0 | 0.0 | -0.9 | 4.2 | 17.2 | 12.1% | 15.2% | 3.2% |
| 美国新加坡 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 7.3 | 32.0 | 1.3% | 1.0% | -.4% |
| 美国西弗 | 0.0 | 0.0 | -0.1 | 3.8 | 17.9 | 1.3% | 1.7% | .4% |
| 资产 | 视图 1 | 视图 2 | 视图 3 | µ | S | WMKT | 后面的  重量 | 改变 |
| 国际开发 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 4.8 | 16.8 | 24.2% | 26.0% | 1.8% |
| 国际 电子工程师 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 6.6 | 28.3 | 3.5% | 3.5% | -.0% |
| 总 |  |  |  |  |  |  | 101.8% |  |
| 返回 | 5.2 | .2 | 2.0 |  |
| 欧米茄/  头 | .08507 | .00563 | .01864 |
| 拉姆达 | .002 | -.006 | -.002 |

然后，我们使用新计算的Ω矩阵值，将所有视图一起指定，并得出上表7所示 的最终结果 ，将所有3个视图混合在一起。

## 衡量视图的影响

本节将讨论文献中用于测量观点对后验分布影响的几种方法。 一般来说，我们可以将这些措施分为两组。 第一组允许我们检验观点或后验与先验相矛盾的假设。 第二组允许我们测量前置和后验之间的距离或信息内容。

Theil（1971）和Fusai和Meucci（2003）描述了旨在允许假设检验以确保观点或后验不与先前估计相矛盾的度量。 Theil（1971）描述了一种执行假设检验以验证视图是否与先验兼容的方法。 我们将扩展这项工作以衡量后验和先前的兼容性。 Fusai和Meucci（2003）描述了一种在使用替代参考模型时测试后验和先验兼容性的方法。

他和Litterman（1999）以及Braga和Natale（2007）描述了可用于测量两个分布之间的距离或前和后之间倾斜量的度量。 这些度量不适合假设检验，但它们有可能用作优化过程的约束。 他和Litterman（1999）定义了一个度量，Λ，它测量每个视图在后部引起的倾斜。 Braga和Natale（2007）使用跟踪误差波动性（TEV）来测量从前到后的距离。

## 泰尔对 views 与先验之间的兼容性的度量

Theil（1971）将其描述为测试视图与先前信息的兼容性。 给定线性混合估计模型，我们有先验 （17） 和条件 （19）。

(17) *x*b=p+*u*

(19) *p*β=*q*+*v*

混合估计模型将 *u* 定义为均值为 0 且协方差为 τΣ 的随机向量，将 v 定义为均值为 0 且协方差为 Ω的随机向量。

我们将采用的方法与从线性回归分析预测时采用的方法非常相似。 我们对视图有两种估计，即视图的条件估计和回报的后验估计。

我们可以将后验估计定义为  。 我们可以将先验视图和视图之间的估计误差测量为：

1. g=（*x* b^−μ）=*x*（b^−b）+*u*

向量ζ具有均值 0 和方差 V（ζ）。 我们将使用以下公式形成我们的假设检验

1. =*E**V*  −1 *E*

量 ξ 称为马氏距离（z 分数的多维模拟），分布为 χ2（n）。 为了使用这种形式，我们需要求解 E（ζ） 和 V（ζ）。

如果我们只考虑视图中的信息，则β的估计器为：

=*PT*  −1 P−1 *P* *T* −1*Q*

请注意，由于 P 不需要是全秩矩阵，因此我们可能无法按编写的方式计算此公式。 我们在这里的返回空间（而不是视图空间）中工作，因为它看起来更自然。 稍后 我们将公式转换为视图 空间以使其可计算。

然后，我们将新的估计器代入公式（45）并消除x，因为它是Black-Litterman混合估计应用中的单位矩阵。

1. ζ=（P T Ω−1 P）−1 *PT* Ω−1*Q*−β+*u*

接下来 ，我们将公式（19）替换为Q。

ζ=（P T Ω−1 P）−1 P *T* Ω−1（*P* β+*v*）−β+*u*

ζ=（P T Ω−1 P）−1（P T Ω-1 P）β+（P T Ω-1 P）− 1 P *T* Ω-1 v-β+u ζ=（*PT* Ω−1 *P*）−1*PT* Ω-1 *v*+*u*

给出我们的估计器，我们想找到估计器的方差。

*V * =*E* T

*V *=*E*  P *T*  −1 P−1 P T −1 *V V* T −1 P*P* T −1 P−1−2 *P T* −1 P−1 *P* T −1*v u* T*uu* *T*

但是 *E*（vu） = 0，因此我们可以消除交叉 项，并 简化公式。

*V* =*E* [P T −1 P−1 P T −1 *v V T* −1 P*P* T −1 *P*− 1*uu T*]

*V* =*E* [*P*−1 v  *v* T *P* T−1*uu* *T* ]

*V* =*PT* −1 *P*−1

最后一步是取公式（47）的期望值。 同时 ，我们将用后验估计值（μ）代替β。

*E*（ζ）=（P T Ω−1 P）−1 *PT* Ω−1*Q*−Π

现在将各种值代入 （46 ），如下所示

ξ=（（P T Ω−1 P）−1 P T Ω−1 *Q*−Π）[（P T Ω−1 P）−1+τΣ]− 1（（*P T* Ω−1 *p*）−1 *p* t Ω−1*q*−π）*t*

不幸的是，在通常情况下，我们无法计算ξ。 由于 P 不需要包含每个资产的视图，因此多个术语并不总是可计算的。但是，我们可以通过乘以 P 和 PT 轻松地将其转换为查看空间 e。

1. ξ^=（Q−P Π）[Ω+P τΣ*P* T ]−1（*Q*−*P* Π）*T*

公式 （48） 中的这个新的检验统计量 ξ 分布为 χ 2（q），其中 q 是视图数。它是后验回报估计的马氏距离与估计的后验协方差的平方。 我们可以使用此检验统计量来确定我们的观点是否与我之前的观点一致，以及标准置信度检验。

*P*q=1−*F* *q*

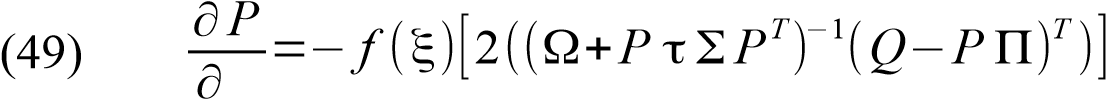
其中 F（ξ） 是 χ2（q） 分布的 CDF。

我们还可以使用链式法则计算此度量对视图的敏感性。



∂ q ∂ ∂*q*

替换各种术语

*q*

其中 f（ξ） 是 χ2（q） 分布的 PDF。

## 泰尔对后验信息来源的测量

Theil（1963） 描述了一种 可用于确定pr ior和视图的后验精度贡献的度量。 他称之为 θ 的度量在所有来源中总和为 1，如果我们测量每个视图的贡献，也可以方便地跨视图求和。先验对后验精度贡献的度量 为

1. θ*prior*=1 *n tr*（（τΣ）−1[（τΣ）−1+*PT* Ω−1 *P*]−1）

其中 n 是资产的数量。 下面的公式可以通过使用完整的矩阵 P 和 Ω 用于所有视图。 对于单个视图 （i），只需使用 P 和 Ω 的相关切片。

1. *i*=1 *n tr**PYou* −*i .*1*i*[−1*P* T −1 *P*]−1

公式 （50） 和 （51） 提供了可用于计算先验和视图对后验精度的贡献的公式。我们可以使用这种诊断来确定相对贡献是否符合我们对这个比例的直观看法。

## Fusai和Meucci的一致性测量

接下来 我们将看看 Fusai 和 Meucci （2003）的工作。 在他们的论文中，他们提出了一种量化后验回报估计和先前估计之间的统计差异的方法。 这提供了一种校准视图不受损害的方法，并确保在先前均衡估计的背景下查看后验估计值时不是极端的。

在他们的论文中，他们使用了替代参考模型。 他们的度量与泰尔的相容性度量相似，但由于替代参考模型使用后验回报的先验方差，因此它们不需要任何方差的推导。 我们也可以将其度量的变体应用于规范参考模型。

他们建议使用后向回波与先前回波的马氏距离的平方马氏距离。我们在这里包含τ以匹配规范参考模型，但他们的工作不包括τ，因为他们使用替代参考模型。

1. *M**q*=BL−−1*BL*−

它本质上是衡量从先前的μ到估计回报（μBL）的距离，通过估计的不确定性进行归一化。 我们使用先验分布的协方差矩阵作为不确定性。 马哈拉诺比斯距离的平方为χ2（q），其中 q 是资产的数量。 这可以很容易地用于假设检验。 因此，此事件发生的概率可以计算为：

1. *Pq*=1−*F*  *M* *q*

其中 F（M（q）） 是具有 n个自由度的 M（q） 的卡方分布的 CDF。

最后，为了确定哪些视图对远离均衡的距离贡献最大，我们还可以计算每个视图的概率敏感性。 我们使用链式法则来计算偏导数

*提单*

∂

*P*



*q*



∂

*P*

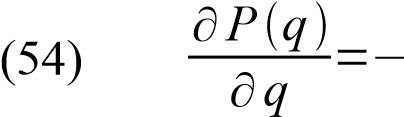
∂

*M*

∂

=

∂*q* ∂*M*  ∂*BL* ∂*q*

*f M*  [2 *BL*−][P*P*−1 *P*]

其中 f（M） 是卡方分布的 PDF，M（q） 的自由度为 n 个。 请注意，此度量与 （49） Theil 的先前视图和视图之间的兼容性度量非常相似。

他们在论文中举了一个例子，结果初始概率为94%，后验与先验一致。 他们指定他们的投资者希望这个概率不低于95%（假设检验中常用的置信水平），因此他们会调整他们的观点以使概率保持一致。 鉴于他们还计算敏感度，他们的投资者可以确定哪些观点提供了他们衡量的最大边际增长，然后投资者可以调整这些观点。 这些敏感性是特别有用的，因为某些观点实际上可能将后验拉向先验，投资者可以加强这些观点，或削弱将后验从先验中拉开的观点。 最后一点似乎不直观。 鉴于视图由协方差矩阵间接耦合，人们可以期望这些视图只会将后验分布推离先验分布。 然而，由于这些观点可能是直接的或通过相关性相互冲突的，任何单个观点都会产生净影响，将后验推向更近，或将其推得更远。

他们建议以迭代方法使用他们的度量，以确保后验与指定的置信水平一致。

使用规范参考模型，我们可以使用返回的后验方差重写公式（52），而不是τΣ，从而产生：

(55) *M**q*= BL− −1*P*T −1 *P*−1 *BL*−

否则， 它们的一致性度量及其用法对于两个参考模型是相同的。

## 他和 里特曼 ·拉姆达

他和Litterman（1999）使用测量Λ来测量每个视图对后部的影响。 他们将Black-Litterman无约束后验投资组合定义为均衡投资组合（先验）和每个视图的对比的混合，该贡献由Λ衡量。

推导 Λ 的公式，我们将从公式 （10） 开始，并代入后验分布中的各种值。

*w*=−1

我们将公式 （0） 的返回值替换为 

1. *w*=1 −1 *M*−1[−1*P* T −1*Q*]



我们将首先简化协方差 项

−1 *M*−1=*M*−1−1 *M* −1

−1 M−1= *M**I*−1

−1 M−1=−1−1*M* −1

−1 *M*−1=−1−1−1*P*−1 *P* T −1

−1 *M*−1=−11 −1*P*−1 *PT* − 1 

−1 *M*−1=P T  P−1[1*P* T  *P*−1−1]−1

*T T T T*  T-1

− 1 *M*−1=P *T*   P−1[P  P−P  PP  P [ *P*   *P* ]

1 1 1 1 

−1 *M*−1=  [*I*−P *T*   P*P* T  *P* −1]

1 1  1

然后我们可以定义

[

 P *T*  *P*

1. *A*= ]

 1

最后重写为

1. −1 *M*−1=  [*I*−*PT A*−1 *P*  ]

1 1

我们的目标是将公式简化为 表单

*w* =11 {*weq**PT* }

1

我们使用乘数， 因为在Black-Litterman参考模型中，投资者不是

1

完全投资于先前（均衡）投资组合。

为了找到 Λ，我们将公式 （58） 代入 （56），然后收集项。

*w*=1 1 [*I*−P *T A*−1 *P*1 ][− 1*PT* −1*Q*] 

w=1  [−1−P T A−1 P  P *T*  −1 *Q*−P T A−1 *P*  *P* T −1 *问*]

 1 11 

1 *T* −1 1 −1*Q*

*w*=1{*weq**P* [−*A* P 1  −*A*−1 P1 *P T* −1*Q*]}

*w*= 1 {w P T[−1 *Q*−*A*−1 P  *weq* −*A*− 1  *P T*  *P*  −1*Q* ]}

# 1 *EQ*  1 1 

因此， 我们可以看到，与 （57） 一起，以下公式定义了 Λ。

1. =−1 *Q*− *A*−1 P *weq* −A−1  *P*  *PT* −1*Q*

 1 1 

他和 Litterman Λ 表示每个视图组合在最终后验权重上的权重。 因此，我们可以用 Λ 来衡量我们的观点的影响。

我们还可以推导出替代参考模型的 He 和 Litterman Λ，我们称之为 ΛA。我们从相同的逆向优化公式开始。

*w*=−1

我们将公式 （24） 的回报替换为  ，但我们使用先验协方差矩阵，因为我们使用的是替代参考模型。

1. *w*=1 −1−1P T −1 *P*−1[−1*P* *T* −1*Q*]



我们将首先使用伍德伯里矩阵恒等式简化协方差项。

= −1−1*PT* −1 *P*−1

= *I*−1−*I*−1 P T *P*   I−1 P *T*−1  *P*  *I*− 1

= *I*−P T *P*   P *T* −1 *P* 

然后我们可以定义

*AA*=*PT*  *P*

然后我们可以将上述结果代入公式 （43） 并扩展项。

*w=1* *I*−P T *A*−*A*1 *P* [−1P T −1 *Q*]  *w*=1 −1*P T* − 1 *Q*−PT A−A 1 P −*P* T *A*−*A* 1 P  P  *T*  −1 Q  *w*=−1 1 *P T* [−1*Q*−*A*−A 1 P −*A*−*A*1 P   *P T* −1*Q*]

 

−1 1

*w*=  P T [−1 *Q*−A−A 1 P *weq*−*A*−*A*1 P   *P* *T* −1 *Q*]

 

他和 Litterman Λ在替代参考模型中采用类似的形式，如下所示。

*w* =*weq**PT* *A*

请注意，在另类参考模型中，投资者先前的投资组合与均衡投资组合具有完全相同的权重。

我们可以看到，以下公式定义了 ΛA。

(61)  *A*=−1 Q −*A*−A 1 P  *weq*−*A*−*A*1 P  *P T* −1*Q*

 

## 布拉加和纳塔莱以及跟踪误差波动性

Braga和Natale（2007）建议使用后置和先前投资组合之间的跟踪误差作为与先前投资组合距离的度量。 跟踪误差通常被投资者用来衡量风险与基准，并可用作投资约束。 由于它是如此常用，大多数投资者对TEV有直观的理解和一定程度的舒适感。跟踪误差波动定义为

(62) *TEV*=w *Tactv* w *actv where wactv*=w −*wr*

其中 w *actv*主动权重，或主动投资组合 w 投资者投资组合中的权重 *wr*参考投资组合中的权重

 回报协方差矩阵

他们还推导出跟踪错误灵敏度的公式如下：

*TEV*= *f* *wactv*

我们可以进一步细化 *wactv*=*g**q*，*其中 q 表示视图*

然后我们可以使用链式法则来分解TEV对视图的敏感度

∂ *w行动电视*

(

63

)

*给你的*

=

∂

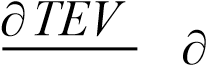
*给你的*

∂

∂*q* ∂*wactv* ∂*q*

我们可以直接求解公式（63）的第一项，

*wT* actv  *wactv*

=

∂*在ActV*∂ *InActv*

*设 x*=*wT行动电视* *w行动电视 ,然后应用链式法则x*

∂

*给你的*

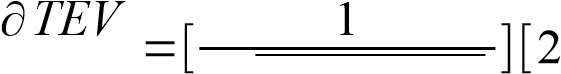
=

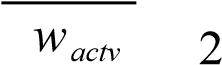
∂

*给你的*

∂

∂在Actv ∂ *X*∂*In Actv*

*T*  *wactv* ]

 ∂ *in* actv  *inactv*

  *WActv*

∂在活动中  =*wT* 活动视频  *在活动中*

求解公式（63）的第二项稍微复杂一些。

*w裁判* 

∂

*在*

*行动电视*

∂



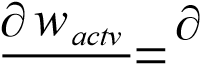


*在*

−

=

∂*q* ∂*q*

−1 *E**r*−−1

∂*q* ∂*q*

*∂wactv* −1∂*E**r*−

=

∂*q* ∂*q*

*∂wactv*−1  P *T*  [P  *P*T ]−1[*Q*−*P* ]

= ∂

*∂问* ∂*问*

*∂∂wq actv* =−1 P T [*P* *PT*]−1

∂*wactv* = 1 P T [*P*  *PT* ]−1

∂*q*  

这个结果与Braga和Natale（2007）论文中发现的结果有些不同，因为我们使用Black-Litterman 模型的形式，它需要较少的矩阵反演。 灵敏度的公式 为

1. *∂q* =  *wactv* 1 P T [*P*  *PT*  ]−1



*在*

*行动电视*

*T*



*在*

*行动电视*



我们可以很容易地为 Canoni6'1cal 参考模型模型提出等效指标。 如果我们只是注意到在跟踪误差场景中，协方差矩阵应该是最准确的，这将是后验协方差矩阵。

∂*给你的* *w* ∂*w行动电视*

=

*行动电视*

∂*q* *wTactv*  *inactv* ∂*q*

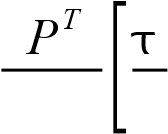
∂*给你的* *w PT*∂

=

*行动电视*

∂*q* *wtactv*  *wactv* 1∂*q*

产生规范参考模型的 TEV 灵敏度。

1. ∂∂*TEVq* =*wT*actv w*actv* *w* *actv* 1 −1−*A*−1 1*P*  *P* T −1]

Braga和Natale在他们的论文中通过一个相当简单的例子工作，但他们没有提供重现结果所需的所有原始数据。 我一直无法重现它们的平衡或混合结果。 鉴于论文中提出的它们的后验分布，人们可以很容易地重现他们的TEV结果。

TEV的一个优点是大多数投资者都熟悉它，因此他们会对它所代表的东西有一些直觉。 Fusai 和 Meucci （2003）引入的一致性指标对投资者来说并不熟悉。

## Herold中引入的指标（2003）

Herold（2003）讨论了投资者可以应用于其模型以验证输出的诊断概念。 其中一个诊断是视图之间的c或相关性，作为一个诊断，可用于确定更新后的投资组合的表现。 通过检查视图  P  *Pt*  的相关矩阵，我们可以确定视图的相关性。如果视图高度相关，那么我们可以预期所有视图在正确时都会对性能做出贡献，如果它们不正确，则表现不佳。 如果这些观点不是高度相关的，那么我们可以期待对绩效的多样化贡献。

例如，如果我们 使用 He 和 Litterman 的数据 以及他们的两个视图，我们将此度量计算为

*P*  *Pt*=[0.0213 0.0020 ]

0.0020 0.0170

非对角线元素 0.0020 比对角线元素（0.0213 和 0.0170）小一个数量级。 这种差异表明视图没有很强的相关性。 这与他和Littermans对松散相关的相互排斥资产集的两种观点的解释是一致的。

Herold（2003）还讨论了通过视图跟踪误差的边际贡献。 这与Braga和Natale计算的度量相同，尽管他建议从He和Litterman的Λ，ΛA的替代参考模型版本中推导出公式。

Herold（2003）考虑了主动管理的情况，这意味着Black-Litterman模型正在应用于某些por tfolio上的主动管理叠加。 在这种情况下，先验分布对应于 weq = 0。 后部权重是叠加权重。 他使用替代参考模型并计算一个数量 Φ，这是 Λ A 的活动管理版本。

 *A*=−A−A 1 P  *weq*−*A*−*A*1 P   *PT*  − 1 Q  −1*Q*

 

*但是 weq*=0， *所以*

=−1 Q −*A*−*A*1 P  *PT* −1*Q*

  *其中 wactv*=*PT* 

Herold从公式（62）开始，就像Braga和Natale一样，但随后使用替代公式来跟踪误差。

*TEV*=w *Tactv*  w actv  *其中 w* *actv*=w−*wr* 以及

*T*

*在actv*=w−*weq*=*P* 

*TEV*=T P  *PT* 

*TEV*

然后，我们可以 通过视图找到跟踪错误的边际贡献。 由

*Q*

链式法则

TEV =*TEV* ×

*Q*  Q

*TEV* = P  P T *T* ×1 [−1−*P*  P T−1 P   *P T* −1]

*Q*   P  *P* 

请注意，我们可以使用 He 和 Littermans 的 Λ 对规范参考模型执行相同的计算，但我们还需要在计算中使用分布的后验协方差，而不仅仅是 Σ。

## 措施演示

现在，我们将处理一个示例问题来说明 所有 指标，并提供一些其功能的比较。我们将从He和 Litterman （1999）的均衡开始，例如1使用他们论文中的观点， 德国的表现将比其他欧洲市场高出5%，加拿大将比美国高出4%。

表8 – 示例1 返回和权重，来自He和 Litterman的平衡，（1999）。

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 第0 页 | 第1 页 | M | 米情商 | Weq/（1+τ） | 在\* | w\* - 在方程/（1+τ） 中 |
| 澳大利亚 | 0.0 | 0.0 | 4.45 | 3.9 | 1.50% | 1.5% | 0.0% |
| 加拿大 | 0.0 | 1.0 | 9.06 | 6.9 | 2.1% | 53.3% | 51.2% |
| 法国 | -0.295 | 0.0 | 9.53 | 8.4 | 5.0% | -3.3% | -8.3% |
| 德国 | 1.0 | 0.0 | 11.3 | 9 | 5.2% | 33.1% | 27.9% |
| 日本 | 0.0 | 0.0 | 4.65 | 4.3 | 11.0% | 11.0% | 0.0% |
| 英国 | -0.705 | 0.0 | 6.98 | 6.8 | 11.8% | -7.8% | -19.6% |
| 美国 | 0.0 | -1.0 | 7.31 | 7.6 | 58.6% | 7.3% | -51.3% |
| q | 5.0 | 4.0 |  |  |  |  |  |
| H/T | 0.02 | .017 |

表（8）说明了应用视图的结果，表（0）显示了各种影响措施。

表9 - 实例1的影响措施

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 量 | 值（置信水平） | 灵敏度 （V1） | 灵敏度 （V2） |
| 泰尔的度量 | 1.672 (43.3%) | -5.988 | -11.46 |
| 泰尔的θ | 0.858 （前值） | 0.0712 | 0.0712 |
| 福赛 和 梅奇的措施 | 0.8728 (99.7%) | -0.1838 | -0.3327 |
| L |  | 0.2920 | 0.5380 |
| 给你的 | 8.28% | 0.688 | 1.294 |

如果我们检查估计回报与均衡的变化，我们会看到美国的回报率仅下降了29个基点，但分配减少了51.25%，这是由于优化器有利于加拿大，其回报增加了216个基点，其分配 增加了51.25%。 这表明，回报预测中看似温和的变化可能会导致资产权重的大幅波动，这是无约束均值方差优化的常见问题。 在这里，我们使用无约束均值方差或ptimization，不是因为我们必须这样做，而是因为它很好理解和透明。

接下来看看影响度量，泰尔的测量表明，我们只能在43%的水平上确信这些观点与先前的观点一致。 如果我们检查图表（5），我们可以看到这些观点确实与前面的明显不同。 另一方面，Fusai和Meucci对先验和后验相容性的测量具有99.8%的置信水平，因此他们更有信心后验与先验一致。 他们的 approac hes 的一个主要区别是 Theil 在视图空间中工作，在我们的示例中，视图空间的阶数 = 2，而 Fusai 和 Meucci 在资产空间中工作，其阶数 = 7。

所有指标对视图的敏感性都表明，第二个视图的相对权重大约是 第一个视图的两倍，因此第二个视图对权重变化的贡献要大得多。

后验投资组合的TEV为8.28%，这对于后验投资组合跟踪平衡端口的紧密程度具有重要意义。考虑到我们正在处理的场景，这似乎是一个非常大的 TEV 值

接下来，我们将方差乘以 2 来改变对视图的信心，这将增加从前到后的变化，并允许我们根据影响度量做出一些判断。

表10 – 示例2 返回和权重，来自He和 Litterman的平衡，（1999）。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 第0 页 | 第1 页 | M | Weq/（1+τ） | 在\* | w\* - 在方程/（1+τ） 中 |
| 澳大利亚 | 0.0 | 0.0 | 4.72 | 1.5% | 1.5% | 0.0% |
| 加拿大 | 0.0 | 1.0 | 10.3 | 2.1% | 22.7% | 20.6% |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 资产 | 第0 页 | 第1 页 | M | Weq/（1+τ） | 在\* | w\* - 在方程/（1+τ） 中 |
| 法国 | -0.295 | 0.0 | 10.2 | 5.0% | 1.6% | -3.4% |
| 德国 | 1.0 | 0.0 | 12.4 | 5.2% | 16.8% | 11.6% |
| 日本 | 0.0 | 0.0 | 4.84 | 11.0% | 11.0% | 0.0% |
| 英国 | -0.705 | 0.0 | 7.09 | 11.8% | 3.7% | -8.1% |
| 美国 | 0.0 | -1.0 | 7.14 | 58.6% | 38.0% | -20.6% |
| q | 5.0 | 4.0 |  |  |  |  |
| H/T | 0.09 | 0.07 |

表11 - 实例2的影响措施

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 量 | 值（置信水平） | 灵敏度 （V1） | 灵敏度 （V2） |
| 泰尔的度量 | 1.537 (46.4%) | -4.27 | -12.39 |
| 泰尔斯 一世 | 0.88 | 0.05 | 0.07 |
| 福赛 和 梅奇的措施 | 0.7479 (99.8%) | -0.06 | -0.24 |
| L |  | 0.193 | 0.544 |
| 给你的 | 7.67% | 0.332 | 1.406 |

检查表（10）中的更新结果，我们发现预测回报的变化已经减少，这与我们在观点中增加的不确定性一致。 我们现在对加拿大的拨款增加了20%，对美国的拨款减少了20%。 从表（11）中我们可以看到，泰尔的衡量标准有所增加，但只是一小部分，我们仍然没有信心相信这些观点与先前的观点一致。 Fusai和Meucci现在的测量是99.8%的置信度，后验与先前一致。 在实践中，我们想要使用什么界限是叔叔，但他们的度量通常比泰尔的度量具有更高的置信度。 TEV已经下降，现在是7.67%，并没有明显缩小。

所有敏感度再次表明，第二种观点对最终权重的影响更大。

在这两种情况下，我们可以就这些不同的措施得出一些结论。 Theil的一致性测量测试范围从46%的置信度到44%的低置信度，确信这些观点与先前的估计一致。 这一措施非常敏感，目前尚不清楚什么是良好的置信阈值。 50%似乎在直觉上很有吸引力。

Fusai和Meucci的一致性测量范围为98.38 %至99.98%，表明后验估计与先前高度一致。 Fusai和Meucci提出，投资者可能要求置信水平为5%。 鉴于这些结果，这似乎是一个相当大的价值。 一致性度量的灵敏度与度量成比例，对于度量值较低，灵敏度非常低。

Theil的θ随观点的置信度而变化，并且通常表明后验信息的much起源于先验。 它随着置信水平的变化而直观地移动。

在这两种情况下，TEV下降了61个基点，但相对于8.28%的起点，它仍然 有很大的 主动权重。 目前尚不清楚在这种情况下TEV的实际阈值是多少，但这些值可能接近可以容忍的上限。 请注意，在这两种情况下，对第一个视图的敏感度下降了 50%，这与 我们应用的置信度变化一致。

在分析视图引起的倾斜的这些不同度量时，权重的TEV测量视图和优化过程的影响，我们可以将其视为最终输出。 如果投资者担心TEV的限制，则很容易将其添加为优化过程的约束。

他和Litterman的Lambda测量了后验权重视图的权重，但仅在无约束优化的情况下。 这使得它适用于测量影响并成为过程的一部分，但不能用作优化过程中的约束。

Theil的相容性度量和Fusai和Meucci的一致性度量测量后验分布，包括回报和协方差矩阵。视图中的 f ormer 在 资产空间中空间后者。

### 主动管理和黑人垃圾人 模型

当我们的投资者在100%投资的被动基准投资组合之上管理叠加投资组合时，我们会认为主动管理就是这种情况。 在这种情况下，我们 只对叠加感兴趣，而不是对基准感兴趣，因此我们从先前的分布开始，该分布具有 0 个活跃权重和 0 个预期超额收益。模型输入的所有视图回报都相对于均衡基准回报， 而不是 相对于无风险 利率。 权重适用于主动投资组合，因此权重总和应始终为 0。

Herold（2003）讨论了Black-Litterman模型在Active Problem中的应用

管理。 他引入了一个度量Φ，这是He和Litterman的ΛA，为主动管理而修改。 当我们使用Black-Litterman模型进行主动管理与被动基准投资组合时，均衡权重（weq）为0，因此均衡回报（Π）也是0。

因为值 Π = 0，所以 He 和 Litterman 的 ΛA  中的中间项消失了。

(66) =1 [−1 *Q*−*P*   P T −1 P   *PT* −1*Q*]



### 双因素黑人垃圾人

Krishnan和Mains（2005）开发了替代参考模型的扩展，该模型纳入了其他不相关的市场因素。 他们提出的主要观点是，BlackLitterman模型像所有MVO方法一样，将风险衡量为资产的协方差。他们主张更丰富的风险衡量标准。他们特别关注衰退指标，因为许多投资者希望资产在经济衰退期间表现良好，因此持有在经济衰退期间表现不佳的资产存在正风险溢价。 他们的方法是通用的，可以应用于一个或多个额外的市场因素，因为市场对该因子的贝塔系数为零，并且该因子的风险溢价为非零。

它们从标准二次效用函数 （6） 开始，但 为新的市场因子增加了一个附加项。

*T* 0 吨  *n 吨*

1. *U=w* − 2 *w*  w−∑*j*=1 j *w*  *j*

U是投资者 效用， 这是投资组合优化期间的目标函数。 w 是投资于每种资产的权重向量

Π 是每种资产的均衡超额收益向量 Σ 是资产的协方差矩阵 δ0 是市场的 risk 厌恶参数 δ j 是第 j 个附加风险因子的风险厌恶参数 β j 是第 j 个附加风险因子 的风险敞口向量

给定公式（67）所示的效用函数，我们可以取关于w的一阶导数，以 求解均衡资产回报。

*n*

1. =0 *w*∑ j   *j*

*d*=1

将其与公式（7）进行比较，即简单的逆向优化公式，我们看到均衡超额返回向量（Π）是（7）的线性组合，并且是β j  值中的线性项。 这符合我们的直觉，因为我们预计暴露于这一额外因素的资产将获得高于均衡回报的额外回报。

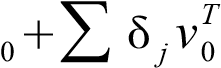
我们将进一步定义以下数量：

Rm 作为市场投资组合的回报。

F j 作为因子 R j 的回报时间序列，作为 风险因子 j 的复制投资组合的回报。

为了计算δ的值，我们需要执行更多的代数。 假设市场没有该因子的风险敞口，那么 we 可以找到一个权重向量 v j，使得 v j T β j = 0。为了找到 vj，我们执行受上述约束约束的最小二乘拟合  。 v 0 将是市场投资组合，v 0 β j = 0  j  通过构造。 我们可以通过将公式 （68） 乘以 v 并求解 δ0 来求解 δ 的各种值。

*n*

*v T 0* =0*v* *T*0 *v* *j*

*d*=1

通过构造 v 0 βj  = 0，v 0Π = rm，所以

*罗 米*

0= *T*

*v* 0  *v*0

对于任何 j ≥ 1，我们可以将公式 （68） 乘以 vj 并 代入 δ0 得到

*n*

*v Tj*  =0 v Tj *v j*∑i  *v Tj* *i*

*i*=1

因为这些因子都必须是独立且不相关的，所以 v i β j = 0  i ≠ j，这样我们就可以求解每个 δj。

*r*  j−0 in *T* j  *in j* 

 *j*= *T*

*v*  j  *j*

作者提出的观点是，这只是一个近似值，因为数量  可能

不等同于 0。v i β j = 0  i ≠ j 的断言也可能不适用于所有 i 和 j  。 对于单个附加因素的情况，我们可以忽略后一个问题。

为了转换这些公式，以便我们可以直接使用 Black-Litterman 模型，Krishnan 和 Mains 更改变量，让

*n*

 =−∑ j   *j*

*d*=1

替换回 （67），我们又回到了标准效用 函数

*U*=w T −0*w* *T*  *w*

2

和来自公式 （13）

*n*

*P* =*P*−∑ j  *j*

*d*=1 *n*

*P* =*P* −∑ j *P*  *j*

*d*=1

*因此*

*n*

*Q*=*Q*−∑ j *P*  *j*

*d*=1

我们可以直接用  和 *Q*into 公式 （25） 代替 BlackLitterman 模型中的后验回报，以便在给定附加因素的情况下计算回报。 请注意，这些附加因素不会以任何方式影响后验方差。

Krishnan和Mains为他们的股票模型做了一个例子，并增加了一个衰退因素。 该因子由Altman不良债务指数和标准普尔500指数中的空头头寸组成，以确保市场对该因子的贝塔系数为零。 他们在 视图 100% 确定的情况下解决问题。 它们提供了在本节中给定的一组公式的情况下重现其结果所需的所有数据。 为了执行所有回归，人们需要能够访问Altman不良债务指数以及他们论文中使用的其他指数。

### 钱和戈尔曼

Qian和Gorman（2001）讨论了一种同时提供条件均值估计和条件协方差估计的方法。 他们使用贝叶斯框架并参考Black-Litterman 模型。 y使用替代参考模型，因为τ没有出现在他们的论文中，他们忽略了条件（或后验）协方差估计。

在本节中，我们将把钱和戈尔曼的方法与BlackLitterman Reference Model中采用的方法进行比较。

如果我们设置 Ω = 0，我们可以将 Qian 和 Gorman 公式 （15） 的方差部分与我们的标签 （QG 15） 与我们的公式 （30） 匹配，并删除 τ（这是替代参考模型）。这描述了投资者对自己的观点有100%信心的情况。 对于那些投资者有绝对观点的资产，后验估计e的方差将为零。 对于所有其他资产，后验方差将不为零。

（QG 15）~*N* [0，− P T v −1P ] 其中 *v* =*P*  *PT*

*Var*=− P TP  *PT* −1*P* 

(30) *M* =− P T *P* P *T*−1*P* 

设置 Ω = 0 并删除 τ

*M* =− P *T* *P*  P *T* −1  *P* 

为了得到钱和戈尔曼的公式17（QG 17），我们需要重新引入视图的协方差，Ω，但不是像Black-Litterman模型中那样混合协方差，我们依靠它们缺乏相关性，只是添加两个方差项。 我们取条件的方差从（13）开始。

*Var*=− P T *P*  P T −1 P *T* *P*T −1 *P*−1

*Var= P TP  P T −1 P T*  P T P  P T −1*P*   P T −1  *P*

(69) *Var*= P T*P*   P T −1P  P **−1−*P*   P T −1 *P* *T* 

请注意，公式 （69） 完全匹配 （QG 17）。

（QG 17）= P T −v 1 *v* −v 1−−*v* 1P  其中 *v* =*P*   *PT* 和 *v*= 。 代

= P T *P*   P *T*  −1P P  P T−1−P  *P* *T* −1*P*  

Qian和Gorman证明了一个条件协方差，它既不是从泰尔的混合估计也不是从贝叶斯更新得出的。 如果视图方差大于先验方差，它的行为可能会增加后验方差与先验方差。 他们将其描述为允许投资者对方差有一个看法，并且他们并不建议Ω需要对角线。 在这个模型中，条件协方差与投资者对方差的看法成正比，但过程并不明确。

将此公式与我们的公式 （30） 进行比较，以获得后验均值估计的方差。

*M* =− P T *P* P *T*−1*P* 

直觉告诉我们，更新的均值后验估计将比先验估计更精确（方差较低），因此我们希望后验（条件）方差始终小于先验方差。 Black-Litterman 后验方差实现了这一目标，并在 unkn 自身均值和已知精度的情况下得出了众所周知的贝叶斯分析结果。 因此，我们似乎应该偏爱这些结果，而不是钱和戈尔曼。

## 未来方向

这项研究的未来方向包括复制原始论文的结果，Black and Litterman （1991） 或 Blac k and Litterman （1992） 。 这些结果具有包括货币回报和部分对冲的额外复杂性。

本文档的后续版本应包含有关过程的更多信息，以及包含来自不同作者的最佳元素的综合模型。 从CAPM均衡到最终优化权重的完整示例将是有用的，并且来自Krishnan和Mains（2005）的双因子模型的工作示例也将是有用的。

Meucci （2006） 和 Meucci （2008） 为非正常视图和返回参数以外的参数视图提供了对 Black-Litterman 模型的进一步扩展。 这允许人们将Black-Litterman模型应用于新的领域，例如另类投资或衍生品定价。 他的方法基于模拟，不提供封闭形式的解决方案。 对他的扩展的进一步分析将在今后对本文件进行修订时提供。

## 使用黑人-垃圾人模型的资产配置过程

当用作资产配置过程的一部分时，Black-Litterman模型提供的估计值比与不受约束的均值方差优化一起使用时从历史回报得出的估计值更稳定，更多样化。 由于这个属性，使用均值-方差优化的 in vestor 不太可能需要人为约束来获得没有极端权重的投资组合。 不幸的是，使用此模型需要各种各样的数据，其中一些可能很难找到。

首先，投资者需要确定他们的可投资范围并找到每种资产的市值。 然后，他们需要估计资产超额回报的协方差矩阵。 这通常是使用适当时间窗口的历史数据来完成的。Litterman （2003） 和 Bevan and Winkelmann （1998） 都详细介绍了高盛用于计算协方差矩阵的过程。在文献中，每月协方差矩阵通常从 60 个月的历史超额骨灰盒中估计。 如果实际资产回报本身无法使用，则可以使用适当的代理，例如美国国内大盘股的标准普尔500指数。短期主权债券的回报，例如美国4周或13周国库券，足以满足大多数美国投资者的无风险利率。

当应用于资产配置问题时，查找流动资产类别的市值信息对个人投资者来说可能是一个挑战，但对于机构投资者来说可能几乎没有障碍，因为他们可以从各种提供商那里获得指数信息。 鉴于非流动性资产类别（例如房地产、私募股权、商品）的市值数据有限，甚至机构投资者可能很难拼凑出足够的市值信息。这些相同资产类别的回报数据也可能因报告的延迟、平滑和不一致而变得复杂。 使问题进一步复杂化的是如何与对冲基金或绝对回报经理打交道的问题。 它们是否应被视为一个单独的资产类别的问题超出了本文的范围。

接下来，投资者需要量化他们的观点，以便可以 应用 它们并计算新的转弯估计值。 这些观点可以来自定量或定性的过程，可以是完整的，也可以是不完整的，甚至是相互矛盾的。

最后，需要将模型的输出输入到投资组合选择模型中，以产生有效的边界，并选择有效的投资组合。 Bevan和Winkelmann（1999）描述了他们的资产配置过程（针对国际固定收益）以及他们如何在该过程中使用Black-Litterman模型。 这包括他们对校准模型的提议以及有关如何计算协方差矩阵的信息。

标准的Black-Litterman模型除了资产回报之外，不提供先行市场因素的直接敏感性。 扩展 Black-Litterman 模型以使用先验分布的多因子模型相当简单。 Krishnan和Mains（2005）对该模型进行了扩展，允许添加额外的跨资产因子，这些因子在市场上没有定价。 这种事实的例子是衰退或信贷市场因素。 他们的方法是通用的，如果需要，可以应用于其他因素。

大多数 Black-Litterman 文献使用封闭形式解决方案报告结果，以实现无约束均值方差优化。They也倾向于在他们的例子中使用非极端的观点。我们相信这样做是为了保持论文的简单性，但它也证明了Black-Litterman模型输出的稳定性，即通过这个过程可以产生有用的结果。作为投资过程的艺术 ，可以合理地得出结论，至少在限制卖空和限制资产类别集中方面将应用一些限制。 缺乏预算约束也与贝叶斯投资人一致，由于他们对市场的信念存在不确定性，他们可能不希望100%投资于市场。 投资组合选择通常被视为两步过程的一部分，首先计算最佳投资组合，然后确定资本市场沿线的位置。

在接下来的讨论中，我们将CAPM均衡分布称为先验分布，投资者的观点称为条件分布。 这与原版《黑色与垃圾人》（Black and Litterman，1992）一致。这也符合我们在没有条件分布的情况下对结果的直觉（Black-Litterman术语中没有观点）。 这与贝叶斯定理的大多数示例的定义方式相反，它们从非静态先验分布开始，然后添加新数据的采样（统计）分布作为条件分布。我们将使用的混合模型，以及我们对正态分布的使用，将使我们得到与这些选择无关的相同结果。

## 资产配置流程

Black-Litterman模型只是资产配置过程的一部分。 Bevan和Winkelmann（1998）记录了他们在高盛固定收益组中使用的资产配置过程。

至少。以黑人-垃圾人为 导向的投资流程 将包括以下步骤：

* 确定哪些资产构成 市场
* 计算资产的历史协方差矩阵
* 确定每个资产类别的市值。
* 使用逆向优化计算资产的 CAPM 均衡回报
* 指定市场视图
* 使用布莱克-垃圾人模型将 CAPM 均衡返回与视图混合
* 将 Black-Litterman 模型生成的估计值（估计回报、协方差）输入到投资组合优化器中。
* 选择符合投资者风险偏好的有效投资组合 下面提供了对每个步骤的进一步讨论。

第一步是确定市场范围。 对于资产配置工作，这将确定要考虑的个人资产类别。 对于每个资产类别，都需要资产类别在市场投资组合中的权重。 然后需要为资产类别的超额回报提供合适的代理回报序列。 在这两个要求之间， 很难将私募股权或房地产等非流动性资产类别整合到模型中。 此外，可能还需要将公共房地产持有与股权（例如 标准普尔500指数中的REITS）分开。 Idzorek （2006） pr提出了将商品作为资产类别纳入所需分析的一个例子。

一旦确定了代理回报序列，并且计算了超过无风险利率的回报，就可以计算协方差矩阵。 通常，协方差矩阵是根据可用的最高频率数据（例如每天）计算的，然后放大到适当的时间范围。 投资者通常使用指数加权方案来增加较新数据的权重，而为较旧的数据提供较少的权重。 其他过滤（随机矩阵理论）或收缩方法也可用于尝试为过程赋予额外的稳定性。

现在，我们可以对市场投资组合进行反向优化，以计算每个资产类别的均衡超额回报。 此步骤的一部分包括计算市场投资组合的δ值。这可以从市场投资组合的回报和标准差中计算出来。 Bevan和Winkelmann（1998）讨论了使用预期的夏普拉蒂靶标来校准δ。 对于他们的国际固定收益投资，他们使用了1.0的市场预期夏普比率。 然后，投资者需要以某种方式校准τ。 该值通常在 0.025 ~ 0.050 的量级。

在这一点上，几乎所有的机器都到位了。 投资者需要指定对市场的看法。这些视图可以任意组合影响一个或多个资产。 这些观点可以是一致的，也可以是冲突的。 观点相互矛盾的一个例子是合并来自多个分析师的意见，他们可能并不都同意。 投资者需要指定每个视图涉及的资产，视图的绝对或相对回报，以及它们在视图回报中的不确定性，与他们的参考模型一致，并通过前面讨论的方法之一进行衡量。

附录D显示了通过公式（25）、（30）和（27）计算回报的新后验估计和后验回报的协方差的过程。 这些 values 将是某种类型的优化器的输入，平均方差优化器是最常见的。 如果用户为一系列回报生成最佳投资组合，那么他们可以绘制一个有效的边界。

### 引用

其中许多参考资料都可以在互联网上找到。 我在我的网站上放置了一个Black-Litterman 资源页面，（www.blacklitterman.org）其中包含许多此类论文的链接。

Beach，Steven和Orlov，Alexei（2006），“具有EGARCH-M派生观点的Black-Litterman模型在国际投资组合管理中的应用”，工作文件。

Bevan和Winkelmann（1998），“使用Black-Litterman 全球资产配置模型：三年的实践经验”，高盛固定收益研究论文。

Black， Fischer and Litterman， Robert （1990），“资产配置：将投资者观点与市场均衡相结合”，高盛固定收益研究报告，1990年9月。

Black， Fischer and Litterman， Robert （1991a）， “Global Portfolio Optimization”， Journal *of Fixed Income*， Vol 1， No2， 7-18.

Black， Fischer and Litterman， Robert （1991b）， “全球资产配置与股票、债券和货币”， 高盛固定收益研究报告， 1991年10月.

Black， Fischer and Litterman， Robert （1992） “Global Portfolio Optimization”。《 *金融分析家杂志*》，1992年9月/10月。

布拉加，玛丽亚·黛博拉和纳塔莱，弗朗西索·保罗（2007）。“TEV对BlackLitterman模型中视图的敏感性”。

Christadoulakis （2002）贝叶斯最优投资组合选择：黑人-垃圾人 方法。课堂笔记。

Da， Zhi and Jagnannathan， Ravi （2005）， Teaching Note on Black-Litterman Model.

DeGroot （1970） Optimal Statistical Decisions， Wiley Interscience.

Firoozye Nick和Blamont，Daniel（2003年），“资产配置模型”，全球市场研究，德意志银行，2003年7月。

弗罗斯特，彼得和萨瓦里诺，詹姆斯（1986）。“有效投资组合选择的经验贝叶斯方法”，《*金融与定量学报*》，第21卷，第3期，1986年9月。

Fusai和Meucci，Attilio（2003）“评估观点”，*风险杂志*，**16**，3，S18-S21。

Giacometti，Rosella，Bertocchi，Marida，Rachev，Svetlozar T.和Fabozzi，Frank J.（2007）“Black-Litterman资产配置方法中的稳定分布”，*定量金融*，7：4，423 - 433

他和Litterman，Robert（1999），“The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios”，1999年。

高盛资产管理工作文件。

Herold， Ulf （2003）， “Portfolio Construction with Qualitative Forecasts”， Journal *of Portfolio Management*， Fall 2003， p61-72.

Herold， Ulf （2005）， “Computing Implied Returns in a Meaningful Way”， Journal *of Asset Management*， Vol 6， 1， 53-64.

Idzorek，Thomas（2005），“Black-L itterman模型的逐步指南，纳入用户指定的置信水平”，工作文件。

Idzorek，Thomas（2006），“战略资产配置和商品”，Ibbotson白皮书。

Koch（2004）一致的资产回报估计。“黑人垃圾人方法”。 2004年10月，简报。

Krishnan，Hari和Mains，Norman（2005），“双因素黑人垃圾人模型”，*风险杂志*，2005年7月。

Litterman等人（2003）。现代投资管理：鲍勃·利特曼和定量研究小组的均衡方法，高盛资产管理，第7章。

Mankert，Charlotta（2006），“The Black-Litterman Model – Mathematical and Behavioral Finance Approach to its Use in Practice”，2006年。 执照论文。

Martellini，Lionel和Ziemann，Volke r（2007），“将Black-Litterman 分析扩展到均值方差框架之外”，*投资组合管理杂志*，2007年夏季，第33，4，33-44卷。

Meucci， Attilio （ 2005）， Risk and Asset Allocation， 2005.施普林格金融。

Meucci，Attilio（2006），“实践中的黑人垃圾人 之外：对非正常市场输入观点的五步食谱”。工作文件可在SSRN上找到。

梅奇，阿蒂利奥（2008）。“完全灵活的观点：理论与实践”，工作文件载于

SSRN。

Meucci， Attilio （2010）.“黑人垃圾人 方法：原始模型和扩展”。工作文件可在SSRN上找到。

钱，爱德华和戈尔曼，斯蒂芬（2001）。“投资组合理论中的条件分布”，*《金融分析师杂志*》， 2001年9月。

Salomons，Anisa （2007），“The Black Litterman Model， Hype or Improvement ？”，论文。

Satchell，Stephen和Scowcroft，Alan（2000）“Black-Litterman模型的揭秘化：管理定量和传统投资组合构建”，*Asset Management*杂志，第1，2卷，138-150。

Theil， Henri （1971）， Principles of Econometrics， Wiley.

### 附录A

本附录包括使用基于广义最小二乘法的泰尔混合估计方法推导的布莱克-里特曼主公式。

#### 泰尔混合估计方法

这种方法来自Theil（1971），类似于原始Black and Litterman（1992）论文中的参考文献。Koch（2005）还包括一个与此类似的推导。

如果我们从回报的先前分配开始。 假设线性模型，例如

A.1 =*x**u*

其中π是先前收益分配的平均值，β是预期回报，u是均值为0且方差Φ的正态分布残差。

接下来 我们考虑一些额外的信息，条件分布。

A.2 *q*= *p**v*

其中 q 是条件分布的均值，v 是 均值为 0 且方差 Ώ 的正态分布残差。

Ώ 和 Σ 都被假定为非奇异的。

我们可以通过编写以下内容来组合先验和条件信息：

# A.3 []=[ *x*][*u*] *q p v*

其中残差的期望值为 0，方差的期望值 为

*E*[*uv*][*u'v*  *'*  ]]=[0 0 ]

然后，我们可以应用广义最小二乘过程，这将估计β为

A.4 =[[ x p][ 0 ]−1[ x' ]]−1[   *x'p '*  ][ 0 ]−1[]



0  *p'0*   *q*

这可以重写为没有矩阵符号

A.5 =[ x −1 x'*p*−1 p' ]−1[ *x*'−1  *p'*−1*q*]

我们可以使用类似的逻辑导出方差的表达式。 假设方差是 −2  的期望值，那么我们可以首先将公式 A.3 代入 A.5

A.6 =[ x −1 x'p−1 p' ]−1[ *x*' − 1*x**u**p'* − 1 *p* *v*]

这简化了操作

=[ x −1 x p1 p' ]−1[ x −1 *x*p' −1 *p* *x* −1  *u**p*− 1 *V*]

=[ x −1 x'p−1 p' ]−1[ x−1 x' p−1 *p*' ][ x − 1  *x'**p*1 p*'*  ]−1[ *x*−1 *u* *p*−1*v*]

=[ x−1 x ' p1 *p'*  ]−1[ *x* −1 *u**p*−1 *v*]

A.7 −=[ x−1 x ' p1 *p'*  ]−1[  *x* −1 *u**p*−1*v*]

方差是公式 A.7 平方的期望值。

*E*−2=[ x −1 x T  p1 *pT* ]−1[ *x*−1 *u* T*p*−1 *V**T* ]2

*E*−2=[ x−1  *x* *T*  p1 *p* *T* ]−2

[ *x*−1 u T u−1 *x* T*p*−1 v T v −1 p T*x*−1 *u* T *v*− 1 *p T*   *p*−1 *v* T *u*−1*x* *T* ]

从上面的假设中我们知道， *E**uu*'=、E*vv*'= 和 *E* *uv*  *'*=0，因为 u 和 v 是自变量，所以取预期，我们看到的交叉项为 0

*E*−2=[ x−1 x T  p−1 p T]−2[*x*−1 −1 *x T*  *p*− 1−1*T*00]

*E*−2=[ x−1 x T  p−1 p T]−2[ x −1  *x* T *p*− 1 *p* *T* ]

我们知道，对于 Black-Litterman 模型，*x* 是单位矩阵，并且 = 因此，在我们进行这些替换之后，我们有

A.8 *E*−2=[−1*p*−1 *p* T ]−1

## 附录B

本节提供了贝叶斯理论相关部分的快速概述，以便创建一个通用词汇，可用于从贝叶斯的角度分析Black-Litterman模型。

## 贝叶斯理论简介

贝叶斯理论 指出

*PA*∣B= *P**B*∣AP*A*

(70)

*P**B*

P（A|B） A的条件（或联合）概率，给定 B也称为 后验分布。 从这里开始，我们将称之为后验分布。

P（B|A） 给定A的B的条件概率。 也称为 采样

分配。 从这里开始，我们将称之为条件分布。

P（A） A的概率。 也称为先验分布。 从这里开始，我们将称之为先验分布。

P（B） B的概率。也称为规范化常量。

当 实际应用这个公式并求解后验分布时，归一化常数将消失在积分常数中，因此从这一点开始，我们将忽略 它。

使用贝叶斯理论的一个普遍问题是确定一个直观和可处理的先验分布。BlackLitterman模型（和均值方差优化）的核心假设之一是资产回报是正态分布的。出于这个原因，我们将仅限于正态分布conditional和先验分布的情况。假设输入是正态分布，那么后验也将呈正态分布。当先验分布和后验具有相同的结构时，先验称为共轭门先验。 鉴于兴趣，没有什么可以阻止我们使用不同的分布构建BlackLitterman模型的变体，但是正态分布通常是最直接的。

BlackLitterman模型的另一个核心假设是，关于实际均值的先验分布和条件分布的方差是已知的，但实际均值是未知的。 这种情况被称为“未知均值和已知方差”，在贝叶斯文献中有详细记载。 这与Theil 使用的模型相匹配，其中我们对均值的估计不确定，但知道方差。

我们在下面定义显著分布：

先验分布 （71） P（A） ~ N（x，S/n）

其中 S 是关于均值的分布的样本方差，有 n 个样本，则 S/n 是关于均值的 x 估计值的方差。

条件分布

1. P（B|A） ~ N（μ，Ω）

Ω均值的估计μ的不确定性，它不是关于均值的分布的 v 一致性。

然后后验分布由下式指定

1. P（A|B） ~ N（[Ω-1 μ + nS-1 x]T[Ω-1 + nS-1]-1，（Ω-1 + nS-1）-1）

（73） 中的方差项是估计均值相对于实际均值的方差。

在贝叶斯统计中，方差的逆称为精度。 我们可以将后验均值描述为先验均值和条件均值的加权均值，其中加权 factor 是各自的精度。 此外，后验精度是先验精度和条件精度的总和。公式（73）要求先验和条件的精度都是非无限的，并且总和不为零。 无限预置权对应于方差 0 或绝对置信度。零精度对应于无限方差或总不确定性。

公式（73）的完整推导，使用 基于PDF的贝叶斯方法显示在附录B中。

作为对 formulas 的第一个检查，我们可以测试边界条件，看看它们是否与我们的直觉一致。 如果我们在没有条件分布的情况下检查公式（73），它应该折叠成先验分布。

~ N（[nS-1 x][ nS-1]-1，（nS-1） -1）

1. ~ N（x，S/n）

正如我们在公式（74）中看到的，它确实坍缩到先验分布。 另一个重要的场景是条件分布的 100% 确定性，其中 S 或其某些部分为 0，因此 S 不是可逆的。我们可以将公式 （73） 中的 retu rns 和方差转换为在 100% 确定性情况下更容易使用的形式。

1. P（A|B） ~ N（x + （信/否）[Ω + 信/否]-1[μ – x]，[（信/号） – （信噪比）（Ω + 信噪比）-1（信噪比）]）

此变换依赖于 （A-1 + B-1）-1 = A – A（A+B）-1 A 的结果。 很容易看出，当 S 为 0（视图置信度为 100%）时，后验方差将为 0。 如果Ω为正无穷大（视图置信度为 0%），则后验方差将为 （S/n）。

在本文中，我们将重新审视方程（73）和（75）后期r，我们将这些基本方程转换为Black-Litterman模型的各个部分。附录 D 包含备选方案的推导

布莱克-里特曼 公式从标准形式，类似于从（73）到（75）的变换。

## 附录C

本附录包含使用标准贝叶斯方法对两个正态分布的后验进行建模的 Black-Litterman 主公式的推导。 另一个推导是在[Mankert，2006]中，她从采样理论中推导出了Black-Litterman的“m紫苑公式”，并且还显示了该公式的两种形式之间的详细转换。

## 基于 PDF 的方法

基于 PDF 的方法遵循贝叶斯方法来计算后验分布的 PDF，当先验分布和条件分布都是正态分布时。 本节基于[DeGroot，1970]中显示的证明。 这与[Satchell and Scowcroft， 2000]中采用的方法类似。

这种证明的方法是检查每个分布的PDF中依赖于E（r）的所有项，忽略其他项，因为它们不依赖于E（r），因此在r方面到E（r）是恒定的。

从我们先前的分布开始，我们派生出一个与 PDF 值成比例的表达式。

P（A）  N（x，S/n），其中有来自总体的 n 个样本。

所以 ξ（x） 的 P（A） 的 PDF 满足

C.1 x∝经验*S* /*n*−1E*r*−*x*2

接下来，我们考虑 条件分发的 PDF。

P（B|A）  N（μ，Σ）

所以 ξ（μ|x） 的 PDF of P（B|A） 满足

C.2 ∣*x*∝经验−1*E**r*−2

将文本中的 C.1 和 C.2 代入公式 （1），我们得到了一个后验分布的 PDF 将满足的表达式。

C.3x∣∝ 经验−−1Er−2S/*n*−1*E**r*−*x*2， 或 *X*∣∝经验−

仅考虑指数中的数量并简化

=−1E*r*−2 *S*/*n*−1*E**r*−*x*2

=−1E r2−2 E22S/*n*−1*E**R*2−2*E**r*x*x2*

=*E**r*2−1S /n−1−2 *E*r−1*x**S* /*n*−1−12*S* /*n*−1*x*2 如果我们引入一个新术语 y，其中

−1*x**S* /*n*−1

C.4 *y*= −1*S* /*n*−1

然后在第二任期中替换

=*E*r2−1S /n−1−2 *E**r* *y*−1S/*n*−1−12 *S* /*n*−1 *x*2

然后添加 0=*y*2−1*S*  /n−1−1−−1x*S*/n−12−1*S* /*n*−1−1

=*E*r2−1S /n−1−2 *E**r* *y*−1S/*n*−1−12 S /n−1 x 2 *y*2−1*S*  /n−1 −−1*x**S*/*n*−12−1*S* /*n*−1−1

=*E*r2−1S /n−1−2 *E**r* y−1*S* /*n*−1 *y*2−1*S* /*n*−1

−12S /n−1 *x*2−−1*x*S/n−12−1*S* /*n*−1−1

=−1S /n−1[Er2−2 *E**r* *y**y*2]−12*S* /*n*−1*x*2

−−1*x*S /n−12−1*S*/*n*−1−1

=−1*S*  /n−1[Er2−2 *E**r* *y**y*2]−−1*x**S*/*n* −12−1*S* /*n*−1−1

−12S /n−1 *x*2−1S/n−1−1*S* /*n*−1−1

=−1*S* /*n*−1[E r2−2 *E* *r* y *y*2]

−2−22 *x*−1S /n−1*x*2S/n−2−1*S* /*n*−1−1

−22S /n−1−1 *x* 22−1S/n−1*x*2 *S* /*n*−2−1*S* /*n*−1−1

=−1*S* /*n*−1[E r2−2 *E* *r* y *y*2]

S /n−1−1 x 2−2 *x*  −1S /n−12−1*S* /*n*−1−1*S*/*n*−1−1

=−1*S* /*n*−1[Er2−2 *E**r* *y**y*2]

−1S /n−1−1*x*−−1*S* /*n*−1

第二项不依赖于 E（r）， 因此它可以包含在比例因子中，我们剩下我们

C.5 *x*∣∝exp−[−1*S* /*n*−1−1*E* *R*−*y*2]

因此， 后验均值是公式 C.4 中定义的 y，方差为

C.6 −1*S* /*n*−1−1

### 附录D

本附录介绍了后验预期回报的布莱克-垃圾人主公式的替代公式的推导。 从公式（24）开始，我们将推导出公式（25）。

*E**r*=[−1P T −1 *P*]−1[−1*PT* −1*Q*]

分离第二项的各个部分

*E**r*=[[−1P T −1 P]−1−1][[−1*P*T −1 *P*]−1*PT* −1*Q*]

将第一个术语中的精确术语替换为替代 形式

*E**r*=[[− P T [P  P *T*]−1 *P*  ]−1 ][[−1*P*T −1 *P*]−1*PT* −1*Q*]

*E**r*=[−[ P T [ P P *T* ]−1 P]][[−1*P*T − 1 *P*]−1 *PT* −1*Q*]

*E**r*=[−[ P T [ P P T]−1 *P*]][−1[−1*P T* −1*P*]−1*PT* −1*Q*]

*E**r*[- P *T*  [P *PT* ]—1  P]][ *i n**PT* −1 *P*]−1*PT* −1*Q*]

*E**r*[- *PT* [P P]−1 P]][ I *n**PT* −1 *P* ]—1*P*−1*Q*]

*E**r*[- *PT* [P P]−1 P]][ I *n**PT* −1 *P* ]—1*PT*  −1−1*Q*]

*Er*=[−[ P *T*  [ P P T ]−1 *P*]][[P  *T* −1*P*  ]−1*问*]

*Er*=[−[ P T [ P P T]−1 P]][ *P* T P *T* −1  [*P T* −1*P* ]−1*Q*]

*E**r*=[−[ P *T*  [ P P T ]−1 P]][ P T [*P*   *P T*  ]−1*Q*]

瞧，布莱克-垃圾人公式的替代形式，用于预期回报。

*E**r*=−[ P T [P  *PT*]−1][*Q*−*P*  ]

### 附录E

公式推导 （12）

我们从视图的定义开始。

1. *Q*̂ =*Q*+ε

哪里

*Q*̂ 是返回视图的未知均值的 k x 1 向量。

*Q* 是返回视图的估计均值的 k x 1 向量。

ε 是回归的 n x 1 残差矩阵，其中 *E*（ε）=0*;V* （ε）=*E*（εε*T* ）= Ω 并且Ω是非奇异的。

我们可以将公式a （1） 重写为 *Q*̂ 的分布，如下所示：

1. *Q*̂∼ *N* （*Q ，*Ω）

我们还可以根据资产的未知平均回报率和投资组合选择矩阵 P 来编写视图的未知平均回报的定义

1. *P* π̂ =*Q*̂

哪里

*P 是* 视图投资组合的w 8 的 k x n 向量。

Π̂ 是 资产未知回报的 n x 1 向量

将 （1） 替换为 （2），我们得到 以下结果

1. P π̂=*Q*+ε

假设 P 是可逆的，这要求它是全秩的，那么我们可以将两边乘以

*P*−1 . 这是视图估计均值到代表 BlackLitterman 条件分布的资产空间中的投影。 如果 P 不是 invertible 那么我们在这里需要一个稍微不同的公式，在右侧添加另一个项 。

1. Π̂=P−1 *Q*+*P*−1 ε

我们想将公式 （5） 表示为分布。为了 做到这一点 ，我们需要计算随机项的协方差。未知资产均值关于投影到资产空间的估计视图均值的方差计算如下：

*方差*=*E*  [P−1 εε T [ *P*−1]*T*  ]

*方差*=*P*−1 *E*  [εε T ][ *P*−1]*T*

*方差*=*P*−1Ω[ *P*−1]*T*

1. *使用 [ P* T ]−1=[*P*−1]*T*

*方*差=*P*−1Ω[ P T ]−1 *使用*  [ *AB*  ]−1=*B*−1 *A*−1 *方差*=[ P *T* Ω− 1  *P*]− 1

因此 ，我们将视图投影到资产空间中，如下所示

1. Π̂∼*N*（*P*−1 *Q ，*[ P *T* Ω−1 *P*]−1）

这里的协方差项是未知平均回报的协方差，它不是预期收益的协方差。

### 附录F

本文档的这一部分总结了实现 Black-Litterman 模型所需的步骤。 给定以下输入 w 每个资产类别的均衡权重。 源自资本化加权 CAPM 市场投资组合，

Σ 资产类别之间的协方差矩阵。可以从历史数据中计算出来。rf  基础货币δ 风险利率 市场投资组合的风险厌恶系数。 这可以假设，也可以计算，如果知道市场投资组合的回报和标准差。

τ 均衡方差不确定性的度量。 通常设置为 0.025 – 0.050 量级的少量。

首先， 我们使用逆向优化来计算均衡回报的向量，Π使用公式（7）。

(7) =*w*

然后，我们制定投资者的观点，并指定 P、Ω 和 Q。 给定 k 个视图和 n 个资产，th en P 是一个 k × n 个矩阵，其中每行的总和为 0（相对视图）或 1（绝对视图）。Q 是每个视图的超额收益的 k × 1 个向量。Ω是视图方差或视图置信度的对角线 k × k 矩阵。 作为起点，大多数作者要求将 ω i 的值设置为等于 p TτΣi p （其中 p 是特定视图的 P 中的行）。

接下来，假设我们在所有视图中都不确定，我们应用Black-Litterman“主公式”来使用公式（25）计算retu rns的后验估计。

(25)  = P *T*  [P  *PT* ]−1 [*Q*−*P* ]

我们使用公式（30）计算后验方差。

(30) *M*=− P *T* [ P  P *T* ]−1 *P*

紧随其后的是公式（27）的样本方差的计算。

(27)  *p*=*M*

现在我们可以从公式（10）计算无约束有效边界上最优投资组合的投资组合权重。

(10) *w* =  *p*−1

1. 作者非常感谢Attilio的反馈和评论梅奇的酒店和鲍里斯格涅登科. [↑](#footnote-ref-1)
2. 更全面的文献调查可以在 http://www.blacklitterman.org/methods.html 找到。 [↑](#footnote-ref-2)
3. 夏普比率是超额回报除以 excESS 风险，或 （r – rf） / 页。 [↑](#footnote-ref-3)
4. 这如表4所示，并在《他和他》第11页提到。垃圾人(1999). [↑](#footnote-ref-4)